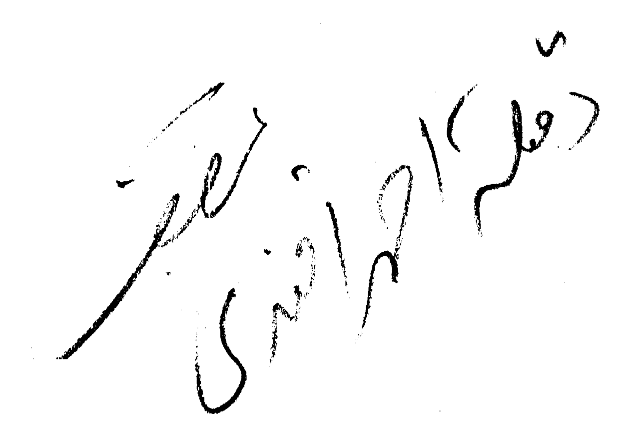


(فهرسة كتاب حساب المثلثات)

صحيفه

صحيفه

صحيفه



صحيفه	سطر	خطا	صواب
٨	١٦	=ظا (١٨٠°ـ سـ)	=ـ ظا (١٨٠°ـ سـ)
٨	١٦	=ظت(١٨٠°ـ سـ)	=ـ ظت(١٨٠°ـ سـ)
١٤	٧	مقدار	مقادير
٢٥	٨	جا (ع ـ ى)	ـ جا(ع ـ ى)
٣٧	٦	ظت ½ ه(هـ ـ و)	ظت ½ (هـ ـ و)
٤٧	١٤	= ٢جت ى جا ح	= ٢جت ى جت ح
٦٥	١٣	اما ى ح = ح	اذا كان ى ح = ح
٧٠	١٨	حَ^{٢} = ىَ^{٢} ـ ٢ ىَ هَ	حَ^{٢} = ىَ^{٢} + هَ^{٢} ـ ٢ ىَ هَ
١٢٩	٢٠	المعامل	الاس
١٤٤	٨	سـ^{٣} + ٣ ع^{٢} (	سـ^{٣} + ٣ ع^{٢} سـ ـ ع^{٣} (





ظلال نعمائك اللهم مديدة * واشكال آلائك منشورة عديدة * وقواطع الموانع عن هباتك شديدة * وموانع القواطع عنك كل يوم جديدة * مستمرة على ممر الثوانى والدقائق * صورت فاحسنت * وانعمت فاتممت * واعطيت فاسبغت * وبينت فاحكمت * واظهرت لمن اخترت خبايا زوايا الحقائق * فمن المحيط بكنه وجودك * ومن المطلع على دوائر كرمك وجودك * ومن القائم بواجبات شهودك * ومن الواقف من الانام عند حدودك * فسبحانك انت الخالق الرازق * فوفقنا للوفاء ببعض حقوق حمدك * والقيام بالخضوع لكبريائك ومجدك * واغدق علينا من خزائن سعدك * وادخلنا بفضلك جنان خلدك * مع من احببته واصطفيته من الخلائق * وصل وسلم على نبيك المحبوب * الذى اطلعته على مفاتيح الغيوب *

ونزهت

ونزهت خلقه عن شوائب العيوب * فنهى عن الحلق والصلق وشق الجيوب *
ورمى بسهام قسى دينه كل منافق * وعلى آله واصحابه ملالئ الرياضة *
الواردين من العلم حياضه ورياضه * العارفين من الدين وسائله واغراضه *
الحائزين من بليغ الكلام عراضه * ماذر شارق اوتألق بارق *
(امابعد) فهذا كتاب فى علم حساب المثلثات * المسمى بالفرنساوية
تريجونوميتريا ترجمه احمد افندى دقله من اللغة الفرنساوية الى اللغة العربية
بمدرسة المهندسخانة الخديوية المصرية * ثم قوبل فى هذه المدرسة مرات
فزال ما احتوى عليه من التعقيدات * فسلك المسلك القويم * وعادت الصحة
للسقيم * على يد كل من مصححه ومقابله ابراهيم الدسوقى وابى السعود
افندى * فجاء بحمد الله المعيد المبدى * سليما من لعثمة الترجمة من اللغات
الافرنجية * منتظما فى سلك التآليف الرياضية العربية * فالحمد كفنا
ببقاء الدولة * وعز الصولة * لمن اجرى الله على يده هذه النعمة * وازال به
من الجهل الغمة * الوزير الاعظم * والدستور المكرم * من غمر
الوفود بالجود وراشا * سعادة افندينا الحاج محمد على باشا * سيد مصر *
وفريد العصر * لازال بالغا امانيه * قاهرا اعاديه * ولازالت خصاله المرضية
الحميدة * وفعاله الخيرية العديدة * توصف ببدائع الاشعار * وابكار الافكار
تنشدها فيما بيننا فرحين * وننشدها ونقول مترنمين

هات حدث وشنف الاسماعا * وتفنن وهذب الاسجاعا
وافتكر وابتكر بديع المعانى * وانتقدها واحسن الاختراعا
واطل فى امتداح صاحب مصر * واجل فى علا المديح اليراعا
هو قرن لاقرن يحكيه اصلا * فضله فى الآفاق شاع وذاعا
قد غدا الدهر عبده فاذا ما * امر الدهر فى الامور اطاعا
كل من رام للوزير سباقا * لم ينل من مناه الا الضياعا
اين كسرى واين قيصر منه * ان ينالا لما اجاد اتباعا
امل الغير ان يمدن مصرا * فابت حين رام الا امتناعا

لم تواصله غير طرفة عين * وسلام الجفا يكون وداعا
فتبدى عزم الخديوى فيها * وسريعا ازال عنها القناعا
وفي اثره ولكن هذا * فاق عنه وابدع الابداعا
فراينا لدارس الدرس عودا * ورايناذكر المدارس شاعا
ورايناغصن المعارف غضا * ناضر الزهر يانعا اينعا
ورايناتلك الجيوش النوامى * ورايناالعدو منها مراعا
وحمينا حمى الحقيقة فينا * وفتحنا مداينا وقلاعا
وتبدى الامان فى الارض حتى * اضعف الشاء ليس يخشى السباعا
لك عقل به عقال المعالى * لعلاه الملوك صارت رعاعا
ولعمرى لأنت شمس علاه * يكسب الغير من علاك الشعاعا
فاطال الاله عمرك طولا * مع طول وزاد فيه اتساعا
كى نرى النصر والسعود بمصر * ونرى للشباب فيها ارتجاعا
انت فيها والنيل نيلان الا * انك اليوم انت اقوى انتفاعا
هو ان جاء مرة كل عام * ورواناوعال قوما جياعا
فلجدوى نعماك فى كل وقت * عنك نروى الاجناس والانواعا
دمت فيها محمدا بمعاليك * عليا من الاله تراعى

ولما تهيأ للتمام * بقدرة الملك العلام *
وسم برضاب الغانيات * فى حساب
المثلثات * فالحمد لله
على كل حال واليه
المرجع
والمآل
تم تم
تم

الباب الاول

فى نظريه الخطوط المثلثية

فى موضوع علم حساب المثلثات وكيفية تقدير الزوايا والاضلاع باعداد

(١)

اى مثلث كان سواء كان مستقيم الاضلاع اوكرويا يوجد فيه ستة اشياء ثلاثة زوايا وثلاثة اضلاع ولاجل تعيينه يكفى معرفة ثلاثة منها لكن اذا كان المثلث مستقيم الاضلاع فلابد ان يدخل فى تلك الثلاثة ولو ضلعا واحدا لان من المعلوم ان الثلاثة زوايا يمكن ان يحدث منها جملة مثلثات مستقيمة الاضلاع غير متساوية بل متشابهة باعتبار ان مجموع الثلاثة زوايا المعلومة مساو لقائمتين

وعلم الهندسة هو المتكفل ببيان الرسوم السهلة لكل طريقة من طرق تعيين مثلث ما اذا علم منه بعض الاجزاء ولكن هذه الطرق كبقية الطرق الرسمية لاتفيد الرسوم الا تقريبا وربما كانت غير كافية لعدم ضبط الا آلات المستعملة فيها ولذلك بحثوا عن ان يبدلوا الطرق الرسمية بحسابات رقمية بها يمكن التوصل الى درجة الضبط المحتاج اليها والغرض الاصلى افادة طرق لحل جميع اجزاء المثلث اذا علم منها ثلاثة ويسمى ذلك بحل المثلث

(٢)

فلاجل تعيين الاضلاع باعداد تقدر بواحد معلوم كالميتر وحينئذ كل ضلع يساوى جملة امتار

(٣)

وقد قدروا الزوايا بالاقواس المحصورة بين اضلاعها ولذا ينقسم اى محيط كان الى جملة اجزاء متساوية اى درج وحينئذ فالزاوية اوالقوس يقدر بعدد من الدرج

وقد اتفق المهندسون سابقا على تقسيم محيط الدائرة الى ٣٦٠ درجة وكل درجة الى ٦٠ دقيقة وكل دقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا بهذه

الكيفية يكون قياس الزاوية القائمة ربع المحيط اى ٩٠ درجة ولكن لازالة الاشتباه فى الاعداد المنتسبة ادخلوا القاعدة الاعشارية فى مقاييس الزوايا وحينئذ يكون ربع الدائرة منقسما الى مائة درجة وكل درجة الى مائة دقيقة وكل دقيقة الى مائة ثانية على قياس ما تقدم

وقد ميزوا الدرجات والدقائق والثوانى بعلامات فعلامة الاولى (٥) والثانية (′) والثالثة (″) فلو اردنا ان نكتب ١٤ درجة و ٩ دقائق و ٣٧ ثانية كتبنا هكذا

٣٧″ ٩′ ١٤°

ولو اردنا تنزيل هذا الوضع على التقسيم الجديد لكتبنا هكذا ٠,١٤٠٩٣٧

فكل درجة من ربع المحيط على التقسيم الجديد تكون فى الوضع كواحد من مائة والدقيقة كواحد من عشرة الاف والثانية كواحد من مليون

وقد اتفق بعض علماء هذا الفن على ان يسموا الجزء بالنسبة للتقسيم القديم درجة وبالنسبة للجديد معشارا

ومع ما للتقسيم الجديد من المزايا فالقديم هو المشهور الآن ولذا لم استعمل غيره

وقد استعملت فى القوانين حرف ط رمزا لنصف المحيط اى ١٨٠°

فى تعريف الخطوط المثلثية واستعمال اشارتى + و — لبيان الاوضاع المتضادة

---

(٤)

قد اضطر المهندسون ان يتوقفوا زمنا طويلا فى ايجاد النسبة التى بين الزوايا واضلاع المثلثات حين ارادوا ان يقدروا الزوايا بالاقواس ولما لم يسهل عليهم اجراء الحساب على الاقواس التجأوا الى ابدال الاقواس بالخطوط المستقيمة التابعة لهذه الاقواس حتى ان الخطوط تتعين اذا علمت الاقواس وبالعكس

وهذه الخطوط العامة النفع الآن فى كل فرع من الفروع الرياضية تسمى

الخطوط المثلثية ولنشرع فى تعريفها على الشكل فنقول

جيب القوس ام من شكل (١) هو العمود م ب النازل من نهاية القوس على القطر المار بالنهاية الاخرى

وظل القوس ام هو البعد ات المحصور على المماس المار من احدى نهايتى القوس بين هذه النهاية وامتداد القطر وم المار من النهاية الاخرى

وقاطع القوس ام هو الجزء وت من نصف القطر الممدود بين المركز وبين الظل

فاذا فرضنا ان س قوس ام فالجيب والظل والقاطع يرمز اليها اختصارا هكذا

م ب = جاس و ات = ظاس و وت = قاس

فاذا امتد م ب حتى قطع الدائرة فى نقطة د فان وتر م د يكون ضعف م ب وقوس م اد يكون ضعف ام فحينئذ جيب قوس ما هو نصف الوتر الموتر ضعف هذا القوس

وبالرمز الى نصف قطر الدائرة برمز نق يكون ضلع المربع المرسوم داخلها مساويا نق $\sqrt{2}$ وحيث كان القوس الموتر بضلع المربع ٩٠° يكون

$$\text{جا } 45^\circ = \frac{1}{2} \text{ نق } \sqrt{2}$$

كما ان ضلع المسدس المرسوم داخل الدائرة يساوى نق والقوس الموتر به ٦٠° فحينئذ يحدث

$$\text{جا } 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ نق}$$

(٥)

وما يضاف الى القوس او الزاوية ليبلغ احدهما ٩٠° يسمى تماما وان بلغ القوس اكثر من ٩٠° فتمامه سالب فتمام ١٢٧° يكون − ٣٧°

وكلتا الزاويتين الحادتين من مثلث قائم الزاوية تمام للاخرى

وجيب تمام قوس ما يسمى جيب تمام هذا القوس وتمام ظله تمام ظله وتمام

قاطعه تمام قاطعه ويرمز لهذه الخطوط اختصارا بهذه الرموز جت و ظت و قت فعلى ماذكر يكون

جت س = جا (٩٠° — س)

ظت س = ظا (٩٠ — س)

قت س = قا (٩٠ — س)

فاذا القينا نصف القطر و ـ عمودا على وا ومددنا كلا من مك و ـط عمودا على و ـ كان جيب القوس ـم هو كم و ـط ظله و وط قاطعه وحيث كان من المعلوم ان قوس مـ تمام قوس ام فبالرمز بحرف س الى قوس ام دائما يحدث

مك = جت س و ـط = ظت س و وط = قت س

ولينتبه الى ان مك = وب اعنى ان جيب التمام يساوى الجزء المحصور بين المركز وموقع الجيب من نصف القطر

(٦)

والبعد اب المحصور بين مبدء القوس وموقع الجيب يسمى عكس الجيب والبعد ـك يسمى عكس تمام الجيب ولكن هذان الخطان غير مستعملين

(٧)

واذا نقلت النقطة م على جميع نقط محيط الدائرة اى من واحدة الى اخرى ثم الى اخرى وهكذا كان للخطوط المثلثية اوضاع مغايرة للاوضاع التى كانت لها حين كان قوس ام اقل من ٩٠° فاذا كان قوس امَ مثلا تمامه سالب ومساوى ـمَ كان وضع تمام جيب كمَ او وبَ على يسار نقطة و مع انه كان اولا على يمينها وبهذا التغير فى وضع الخطوط يعسر الحساب ويظهر ذلك بالمثال فاذا فرضنا كما فى شكل (٢) ان اـط خط ما مفروض عليه النقطتان ا و ـ المتباعدتان بالبعد اـ = ح وان بعد س من نقطة ـ الى نقطة ما كنقطة م مأخوذة

على خط اب ط معلوم وان المراد ايجاد البعد الذى بين نقطة ا و م فاذا رمزنا بحرف ص الى البعد المطلوب فمن المعلوم انه يوجد

ص = ح + س او ص = ح ـ س

وبحسب كون نقطة م فى جهة ب ط اوفى جهة اب يشاهد انا استعملنا قانونين مختلفين لوضعى نقطة م ولكن يمكن ازالة هذه الصعوبة بطريقة سهلة والاكتفاء باحد هذين القانونين بشرط ان يجعل للابعاد المتضادة الاوضاع بالنسبة لنقطة ب علامات مختلفة بان يوضع فى القانون الاول الذى هو ص = ح + س على التوالى س = + س م وس = ـ س م فيحدث اولا ص = ح + س م وثانيا ص = ح ـ س م

فهذا ما يجب العمل به وبهذه الكيفية يليق القانون الاول لجميع مواضع نقطة م ولا حاجة الى الثانى ويمكن ايضا ان تجعل كمية س موجبة فى جهة اب وسالبة فى جهة ب ط وحينئذ فالمعول عليه القانون الثانى ولا حاجة الى الاول وكان يلزم تعداد الامثلة لكن المثال المتقدم كاف فى بيان منفعة القاعدة التى رتبها المؤلف ديكارت وهى انا اذا فرضنا على خط ما مستقيما كان او منحنيا ابعادا مختلفة مقيسة ومبتدأة من نقطة اصلية مشتركة قارة على ذلك الخط دخلت فى الحساب الابعاد المتضادة الاوضاع بالنسبة للاصل مجعولا لبعضها اشارة + ولبعضها اشارة ـ

ثم ان جهة الابعاد الموجبة تكون زيادة على ذلك غير متميزة ومتى تميزت كانت الابعاد السالبة فى الجهة المضادة لجهة الابعاد الموجبة واما الخطوط المثلثية فالعادة ان تعتبر موجبة فى الوضع الذى يكون لها متى كان القوس اقل من ٩٠° وهذا الوضع هو الذى ترى فيه من اول وهلة وسننتهز الفرصة بذكر عدة امثلة مطابقة لهذه القاعدة نرجع اليها عند تطبيق الجبر على الدعاوى الهندسية العملية لكن قبل الشروع فى ذلك ننبه القارئ على غلط معتاد يؤدى الى خلط القاعدة التى تكلمنا عليها بدعوى نظرية محتاجة للبرهان

ضرورة مع ان بينهما بونا بعيدا وما قواه المؤلفون من الاعتبارات فى ذلك الخلط مع ان منها ما هو معقول ومنها ما هو غير معقول غير صحيح بل هو مجرد اتفاق لكن لا تنبغى مخالفته فيما يأتى من الاعمال لوضوح منفعته باجراء الامثلة عليه

فى بيان تنقل الخطوط المثلثية على محيط الدائرة
وكيفية تحويلها الى الربع الاول من المحيط

(٨)

اذا كان $\frac{1}{2}$ قطر وم منطبقا على وا فمن المعلوم ان قوس ام = ٠ والجيب = ٠ والظل = ٠ والقاطع = وا وجيب التمام مك = وا ايضا واما ظل التمام وقاطع التمام فغير منتهيين لان خطى سط و وط يزدادان كلما قرب خط وم من خط وا ويمكن ان يزدادا بلا نهاية فلو رمزنا لنصف القطر برمز نق لحدث

جا٠ = ٠ وظا٠ = ٠ وقا٠ = نق
جت٠ = نق وظت٠ = لا وقت٠ = لا

فاذا ارتفع نصف قطر وم جهة وضع وب شوهد ان كلا من الجيب والظل والقاطع يزداد وان كلا من جيب التمام وظل التمام وقاطع التمام يتناقص واذا كانت نقطة م فى وسط اب كان قوس ام ٤٥° ومثلث وبم متساوى الساقين والجيب مساويا لجيب التمام وحيث ان المثلث ينتج منه $٢\overline{مب}^{٢}$ = نق^{٢} ومن ذلك ينتج مب = $\frac{1}{2}$ نق $\sqrt{٢}$ يكون جا ٤٥° = جت ٤٥° = $\frac{1}{2}$ نق $\sqrt{٢}$

وحيث ان مثلثى وات و وسط متساويا الساقين ومتساويان فالظل وظل التمام مساويان لنصف القطر وينتج من ذلك

ظا ٤٥° = ظت ٤٥° = نق

وحيث ان القاطع وقاطع التمام متساويان ايضا وان مثلث وات يحدث منه (وت)^{٢} = ٢نق^{٢} ومن ذلك يحدث وت = نق $\sqrt{٢}$ ينتج من ذلك

قا ٤٥° = قت ٤٥° = $\sqrt{2}$ نو

وحين تنتقل نقطة م الى ب فالجيب يساوى و ب والظل والقاطع لا ينتهيان وتمام جيب م ك يصير صغرا وتمام ظل ب ط كذلك وتمام قاطع و ط يصير مساويا و ب وحينئذ يحدث

جا ٩٠° = نق و طا ٩٠° = لا و قا ٩٠° = لا و

جت ٩٠° = ٠ = ظت ٩٠° = ٠ و قت ٩٠° = نق

ويمكن استخراج هذه النتايج من النتايج الحاصلة حين يكون القوس مساويا اصغر لان احد القوسين اذا كان صغرا والآخر ٩٠° وكل منهما تمام للآخر يحدث

جا ٩٠° = جت ٠ و طا ٩٠° = ظت ٠ و قا ٩٠° = قت ٠

وبالعكس

(٩)

واذا فرضنا ان نصف قطر و م استمر يدور الى ان وصل الى و مَ فالقوس يصير ا مَ وجيبه مَ بَ ويجعل مَ م موازيا ا اَ ورسم جميع خطوط القوس ا م المثلثية كما هو مبين فى الشكل يظهر اولا ان جيبى م ب و مَ بَ متساويان وحينئذ يكون جا ا مَ = جا ا م

ولايجاد الظل يجب مد نصف قطر و مَ تحت قطر ا اَ فيشاهد ان الظل الذى هو هنا ا تَ فى وضع مضاد للوضع الذى كان فيه اولا وبالضرورة يكون سلبيا وحيث ان مثلثى و ا تَ و و ا ت المتساويين يحدث عنهما ا ت = ا تَ يكون ظل ا مَ = ــ ظل ا م وبمقتضى ما سبق فى التعريف الرابع يكون قاطع قوس ا مَ هو خط و تَ وعلى هذا فليس هذا الخط متجها الآن الى جهة نصف قطر و مَ فى جهة تحرك النقطة التى هى مَ بل فى الجهة المضادة لها وبهذا كان القاطع سلبيا وحيث كان و تَ = و ت ينتج من ذلك ان قا ا مَ = ــ قا ا م

وكل من جيب التمام وظل التمام وقاطع التمام يتغير كما سبق وحيث كان قوس

ا مَ اكبر ٩٠° يكون تمامه سلبيا وحيث كان جيب تمام كمَ او وبَ
على يسار نقطة و يكون ايضا سلبيا وكذا يقال في ظل تمام وطَ
واما قاطع التمام وطَ فلا سبب لان توضع له اشارة ناقص لانه يوجد على خط
ومَ في جهة تحرك النقطة كما وقع في الربع الاول من المحيط ومن حيث ان
مثلث وسط ومثلث وسطَ متساويان ينتج

كمَ = كم، وسطَ = سط و وطَ = وط

فينتج جت امَ = ـ جت ام و ظت امَ = ـ ظت ام و قت امَ = قت ام
ومايضاف الى قوس اوزاوية ليبلغ كل منهما ١٨٠° يسمى متمما وحينئذ يكون
قوس اَ مَ اومساويه الذى هو ام متمما لقوس امَ ويمكن اعادة
ماسبق من الخواص هنا بان يقال ان القوسين المتممين لبعضهما خطوطهما
المثلثية متساوية لكن اشاراتهما مختلفة ماعدا الجيب وقاطع التمام
فان اشارتيهما لا تختلفان
واذا اريد تبيين هذه الخواص بمعادلات رمز الى قوس امَ بحرف س
فيحدث ام = اَمَ = ١٨٠° ـ س ويكتب هكذا

(١) { جا س = جا (١٨٠° ـ س)، ظا س = ظا (١٨٠° ـ س)، قا س = ـ قا (١٨٠° ـ س) } (٢) { جت س = ـ جت (١٨٠° ـ س)، ظت س = ظت (١٨٠° ـ س)، قت س = + قت (١٨٠° ـ س) }

ومن المعلوم ان كلا من الجيب والظل والقاطع ينقص كلما زاد القوس من ٩٠°
الى ١٨٠° وان كلا من جيب التمام وظل التمام وقاطع التمام يزداد ومتى انطبق خط
وم على واَ يحدث

جا ١٨٠° = ٠ و ظا ١٨٠° = ٠ و قا ١٨٠° = ـ نق
جت ١٨٠° = ـ نق و ظت ١٨٠° = ـ لا و قت ١٨٠° = لا
وهذه المقادير كلها يمكن ان تنتج من معادلة (١) بفرض س = ١٨٠°
فمعادلة

جت س = ـ جت (١٨٠° ـ س) مثلا تاول الى

جت

جت ١٨٠° = — جت ٠ وحيث ان جت ٠ = نق يكون جت ١٨٠° = — نق كما هو الواجب

(١٠)

وتطبيق الجبر على الهندسة كثيرا ما تستعمل فيه اقواس مشتملة على جملة من انصاف الدوائر فيلزم افادة قوانين لتحويل هذه الاقواس كلها الى الربع الاول ولنعتبر للاختصار الجيب وجيب التمام دون غيرهما لكثرة استعمالهما ومن حيث ان كل قوس اكبر من نصف محيط الدائرة يتركب من قوس اقل من ١٨٠° زائدا ١٨٠° مرة او مرارا ينبغي اولا ان نبين ما هو جيب قوس ١٨٠° + س وجيب تمامه بفرض س < ١٨٠° فنقول

ليكن القوس المرموز اليه بحرف س الدائر بين ° و ١٨٠° ام فاذا زدنا على ام نصف محيط م ا َ ىَ فالقوس ام اَ ىَ = ١٨٠° + س ويكون لهذين القوسين جيبان متساويان هما م ب و ى َ ب َ او وك و وكَ ولكن حيث ان لهذين الخطين وضعين متعاكسين يجب اتباع الاصطلاح المتقدم في بند (٧) بان تجعل لهما اشارتان مختلفتان ويلزم كذلك ان يكون جيبا التمام وب و وبَ متساويين ومختلفي الاشارة وحينئذ يحدث

$$(٢)\begin{cases} \text{جا } (١٨٠^\circ + \text{س}) = -\text{ جا س} \\ \text{جت } (١٨٠^\circ + \text{س}) = -\text{ جت س} \end{cases}$$

وايضا اذا اضيف ٣٦٠° الى ام فالظاهر انا نرجع الى نقطة م الاصلية من المحيط وحينئذ فجميع الخطوط المثلثية تؤل الى حالتها الاولى فحينئذ يحدث

$$(٣)\begin{cases} \text{جا } (٣٦٠^\circ + \text{س}) = \text{جا س} \\ \text{جت } (٣٦٠^\circ + \text{س}) = \text{جت س} \end{cases}$$

وبالجملة فقوس س ايا ما كان اى سواء كان كبيرا او صغيرا اذا زيد عليه ١٨٠° او عدد فرد من نصف المحيط فان نهايته تنتقل من احدى نهايتي رأس

القطر الى الاخرى وحينئذ يتضح ان اشارتى الجيب وجيب التمام تختلفان
ولكن اذا زيد على س ٣٦٠° اوعدد زوج من نصف المحيط فان الخطوط
المثلثية لا تتغير ابدا حيث رجع ت الى النقطة الاصلية من المحيط

(١١)

ولنتكلم الآن على الاقواس السلبية اعنى الاقواس المرسومة وقت تحرك
نصف القطر الذى كان منطبقا اولا على وا الى الجهة المضادة للجهة الاولى
فنفرض ان ام و اة اللذين هما قوسان متساويان ومتعاكسا الوضع
مرموزا اليهما برمزى س و —س ومن البين حينئذ ان جيبيهما
م ب و ة ب كذلك اى متساويان ومتعاكسا الوضع ولايجاد جيبى
تماميهما ننبه على ان تماميهما اللذين هما ٩٠° — س و ٩٠° + س
مبينان بقوسى م ب و ب م ة اللذين جيباهما م ك و ة ك
متساويان ومتشابها الوضع فيحدث

جا (—س) = — جاس و جت(—س) = جت س (٤)

وهذه القوانين عامة ايا ما كانت الاقواس وان كان قوسا ام و اة فى الشكل
اقل من ٩٠° فان من الواضح انه اذا ازداد هذان القوسان كيفما يراد بشرط
ان يكونا متساويين فجيبا م ب و ة ب لايزالان متساويين ومختلفى
الوضع فعلى هذا يكون دائما جا (—س) = — جا س
واذا فرضنا فى المعادلة الثانية من هذا القانون اقواسا اكبر من ٩٠° كقوسى
ا مَ و ا ةَ وجعلنا س = ا مَ و — س = — ا ةَ
فتمام ٩٠° — س للقوس الاول يصير سالبا ومبينا فى الشكل بقوس ب مَ
الموضوع على يسار نقطة ب وتمام ٩٠° + س للقوس الثانى يصير
مساويا للقوس ب ةَ وموضوعا دائما على يمين نقطة ب وحيث ان الجيبين
مَ ك و ةَ كَ لهذين القوسين اللذين كل منهما تمام للآخر متساويان
ووضعهما واحد بالنسبة لقطر ب بَ يحدث دائما

جت (—س) = جت س فحينئذ ظهر ان قانونى (٤)

عامان

عامان

وليتنبه الى ان جيب تمام قوس مّا موجبا كان اوسالبا معين دائما بالبعد
الكائن بين المركز وموقع الجيب فى المقدار والوضع

(١٢)

والمناسب ان ننبه قبل التوغل فى الفن اولا على ان قوانين (١) (٢) (٣)
(٤) (٥) التى استخرجت يمكن تطبيقها على جميع الاقواس الموجبة
والسالبة ولا نستعمل للاختصار الا الجيب وجيب التمام
فنقول اولا قد سبق فى بند (٩) قانونا

جا س = جا (١٨٠° — س) و

جت س = — جت (١٨٠° — س) اللذان لم يبرهن فيهما الا على الاقواس
الموجبة المحصورة بين صفر و ١٨٠° وبتغيير س فيهما بكمية ١٨٠° + س
يصيران هكذا

جا (١٨٠° + س) = جا (— س) و جت (١٩٠° + س = — جت (— س)

وهاتان المتساويتان واضحتان بمقتضى ما تقدم فى قانونى (٢) و (٤)
ويظهر من ذلك ان القوس يمكن ان يزداد ١٨٠ مرة او اكثر الى غير نهاية
ووضع — س بدل س يتبين منه بواسطة الطريقة السابقة ان هذين
القانونين صحيحان فحينئذ يمكن تطبيقهما على جميع الاقواس الممكنة
وثانيا على ان قوانين (٢) التى برهن فيها على الاقواس الموجبة يمكن تطبيقها
على الاقواس السالبة بتغيير س فيها بكمية — س فتصير هكذا

جا (١٨٠° — س) = — جا (— س) = جا س

جت (١٨٠ — س) = — جت (— س) = — جت س

وهذان القانونان يرجعان الى قانونى (١)
وثالثا على ان زيادة ١٨٠° على اى قوس كان اى سواء كان + س او
— س لا يحدث تغيرا الا فى اشارات الجيب وجيب التمام فحينئذ زيادة ٣٦٠°
على القوس المذكور لا تحدث فيهما تغيرا ابدا وعلى هذا فقوانين (٣) يمكن

تطبيقها على الاقواس السالبة

ورابعا على ان قوانين (٤) لا تحتاج الى براهين اخرى لان من المعلوم انه يمكن تغيير س فيها بكمية — س

(١٣)

ليس لنا الآن اسهل من تحويل الخطوط المثلثية فى اى قوس كان الى الربع الاول من المحيط فاذا اريد مثلا معرفة جيب قوس يساوى ١٠٢٩° طرح من هذا العدد ٣٦٠° مرة او مرتين بقدر ما يمكن فالباقى ٣٠٩ فينتج حينئذ بمقتضى قوانين (٣) جا س = جا ٣٠٩° فاذا طرح ايضا من هذا العدد ١٨٠° يوجد بمقتضى قانونى (٢) جا س = — جا ١٢٩° وباخذ متمم ١٢٩° الذى هو ٥١° يحدث

جا س = — جا ٥١° كما فى نمرة (٩) ويمكن اختصار العملية اكثر من ذلك لان جا ٥١° = جت (٩٠ — ٥١) = جت ٣٩° فحينئذ يكون جا س = — جت ٣٩°

فاذا كان القوس المعلوم س = — ١٠٢٩° يكون للجيب اشارة مخالفة للاشارة الاولى كما فى نمرة (١١) ويحدث معنا

جا س = جت ٣٩°

الكلام على الاقواس المقابلة لجيب

معلوم او جيب تمام كذلك الخ

---

(١٤)

ماسبق من التفاصيل ينتج تنبيه امفيدا هو انه يوجد جملة اقواس خطوطها المثلثية واحدة ولنفرض ان خطا من هذه الخطوط معلوم وان المطلوب البحث عن الاقواس المختلفة المتعلقة بهذا الخط فنفرض كما فى شكل (١) ان جا س = ح ونأخذ على نصف القطر و العمود على وا خط وك = ح ومن نقطة ك نمرر مم َ موازيا لخط وا ومن المعلوم انه يلزم جعل جميع الاقواس المنتهية بنقطتى م و مَ مقدار الجيب س

ويلزم من

وبالرمز الى قوس ام بحرف ع والى ١٨٠° بحرف ف يكون امَ = ف ــ ع وجميع الاقواس الموجبة المنتهية بنقطتى م و مَ محصورة فى هاتين المتسلسلتين

ع ٢ف+ع ٤ف+ع ٦ف+ع الخ

ف ــع ٣ف ــع ٥ف ــع ٧ف ــع الخ

ومن حيث ان اـ اَم = ٢ ف ــ ع و اـ اَمَ = ف+ع

فبزيادة اى عدد كان من المحيط على هذه الاقواس وجعل جميع الاقواس الناتجة سالبة تحدث جميع الاقواس السالبة المقابلة للجيب المعلوم وهى

ــ ٢ف+ع ــ٤ف+ع ــ٦ف+ع الخ

ــ ف ــع ــ٣ف ــع ــ٥ف ــع الخ

وجميع اقواس هذه المتسلسلات الاربعة يمكن حصرها فى قانونين سهلين وذلك لان قوس ع مضاف فى هاتين المتسلسلتين الى جميع المضاريب الزوجية لكمية ف سواء كانت تلك المضاريب موجبة اوسالبة ومطروح فى المتسلسلتين الاخريين من المضاريب الفردية لكمية ف فاذا رمزنا بحرف ك الى كمية ما صحيحة سواء كانت موجبة اوسالبة يمكن ان تصير صفرا فجميع الاقواس المطلوبة تكون منحصرة فى هذين القانونين

س = ٢ك ف+ع و س = (٢ك+١) ف ــع (١)

وهذا على فرض ان كمية ح موجبة فلو كانت سالبة بان كان جاس = ــح وجب نقل ح على وكَ فى جهة وسَ وحينئذ فالاقواس المنتهية بنقطتى ذَ و ذ هى مقادير س واذا فرضنا ان اـ ذَ = ع ظهران اـ ذ = ٣ف ــع و اـ ذَ = ٢ف ــع و اذ = ع ــ ف فمقادير س الموجبة والسالبة المقابلة لجيب وكَ تكون

ع ٢ف+ع ٤ف+ع الخ ٣ف ــع ٥ف ــع ٧ف ــع الخ

ــ٢ف+ع ــ٤ف+ع ــ٦ف+ع الخ ف ــع ــف ــع ــ٣ف ــع الخ

ولا يخفى ان هذه المقادير منحصرة فى قوانين (١)
وعلى كل حال اذا كان ح اكبر من ½ قطر الدائرة فقوس س يكون تخيليا لان اكبر الجيوب الموجبة + نق واكبر الجيوب السالبة — نق

(١٥)

ليكن جت س = ح معلوما فاذا كان ح موجبا ينقل و ب = ح فى جهة وا ويقام من نقطة ب العمود م ن فمقدار كمية س هى الاقواس الموجبة او السالبة المنتهية بنقطتى م و ن
فاذا فرضنا ام = ع ظهر لنا ان هذه الاقواس هى اقواس هذه المتسلسلات الاربع
ع ٢ف+ع ٤ف+ع الخ ٢ف—ع ٤ف—ع ٦ف—ع الخ
—ع —٢ف—ع —٤ف—ع الخ —٢ف+ع —٤ف+ع —٦ف+ع الخ
وبالرمز بحرف ك الى كمية صحيحة موجبة او سالبة يمكن ان تنحصر جميع هذه الاقواس فى هذين القانونين
س=٢كف+ع و س=٢كف—ع (٢)
واما اذا كان ح سالبا بان كان جت س = — ح فتنقل ح فى جهة وا وحينئذ يرمز لقوس ام َ بحرف ع ولا يتغير شئ فيما سبق فاذا كان ح اكبر من ½ القطر فقوس س يصير تخيليا

(١٦)

واذا فرضنا ايضا ان ظا س = ح وان ح موجب ينقل ظل ات = ح فوق خط او ويمر الخط ت م ن َ المستقيم بالمركز حتى يقع محيط الدائرة فى نقطتى م و ن َ فتكون مقادير س السالبة او الموجبة هى الاقواس المنتهية بنقطتى م و ن َ فلو جعل قوس ام = ع حدث ام ن َ=ف+ع و ا ن َ م=٢ف—ع و ا ن َ=ف—ع فتكون

الاقواس المطلوبة حينئذ هى التى فى هذه المتسلسلات

ع ٢ف+ع ٤ف+ع الخ ف+ع ٣ف+ع ٥ف+ع الخ

–٢ف+ع –٤ف+ع –٦ف+ع –٣ف+ع –٥ف+ع

الخ فالقوس المعلوم فى هذه المتسلسلات الاربع مضاف الى جميع مضاريب كمية ف سوآء كانت موجبة او سالبة فالقانون العمومى للاقواس المطلوبة هو

س = كف+ع (٣)

هذا اذا كان الظل المعلوم موجبا واما اذا كان سالبا فينقل على اتَ تحت نصف قطر او وحينئذ فقوس ع يكون دآئرا بين ٩٠ و ١٨٠° كقوس ا مَ ولا يخفى انه يمكن تقدير الظل باى مقدار كان

(١٧)

لا نتكلم الآن على الحالة التى فيها القوس معين باحد الخطوط المثلثية الباقية لان من المعلوم ان الاقواس التى جيوبها وجيوب تمامها وظلها متحدة تكون قواطعها وقواطع تمامها كذلك وسيظهر لك ذلك فى بند (٢٠) عند استخراج الارتباطات التى بين الخطوط المثلثية فينتج من ذلك ان قوانين (١) (٢) (٣) هى التى تحدث حين يعلم قتس و قاس و ظت س

ولا يروح عليك ان كمية ع فى هذه القوانين اصغر الاقواس الدآئرة بين ٠ و ٣٦٠ المقابلة للخط المعلوم وان ف نصف محيط الدآئرة وان ك عدد ما صحيح اى موجب او سالب ويمكن ان يكون صفرا

كيفية تحويل الجيوب وجيوب التمام الى نسب بسيطة

---

(١٨)

لا يستعمل القوس فى حساب المثلثات الا لقياس احدى الزوايا ولا يعتبر طوله الحقيقى بل المعتبر النسبة التى بين محيط الدآئرة والقوس الذى هو جزء منها اى

النسبة المعينة بعدد درجات القوس ولا يخفى انها تكفى فى تعيين الزاوية فان جميع الاقواس المحصورة فى زاوية مجعول رأسها مركزا تحتوى على عدد واحد من الدرجات ايا ما كانت انصاف اقطار هذه الاقواس

فالنسبة التى بين الخطوط المثلثية لهذه الاقواس وبين انصاف اقطار الدائرة التى هى جزء منها ليست متعلقة الا بعدد هذه الدرجات فخطوط م بَ و مَ بً و مً بٍ الخ التى هى جيوب اقواس متشابهة كما فى (شكل ٣) يحدث منها

$\frac{\text{م بَ}}{\text{و م}} = \frac{\text{مَ بً}}{\text{و بَ}} = \frac{\text{مً بٍ}}{\text{و بً}}$ وهذه النسب هى التى عينت حين علمت الزاوية لا الجيوب ويقاس على ذلك جيوب التمام والظلال الخ فيشاهد ان الذى جرت عليه الحسابات هو نسب الخطوط المثلثية الى نصف القطر لا اطوالها الحقيقية وطريقة ذلك سهلة وذلك ان يجعل $\frac{1}{2}$ قطر الدائرة التى فيها الخطوط المذكورة واحد المقادير لان مقادير هذه الخطوط الرقمية هى عين النسب وتسمى هذه النسب فى بعض الاحيان جيوبا طبيعية وجيوب تمام كذلك وظلالا كذلك وظلال تمام كذلك الخ

فهذه هى طريقة تحويل الخطوط المثلثية الى نسب بسيطة وكان الاحسن تقديم هذه الطريقة لكن لعدم مخالفة العادة فى التعليم لا يبدل $\frac{1}{2}$ القطر بفرض آخر فى القوانين الاساسية بل يرمز اليه دائما فيها بكلمة نق

(١٩)

وزيادة على ذلك متى عملت عملية حساب وجعل فيها $\frac{1}{2}$ القطر واحدا سهل علينا تغيير النتايج دائما حتى تصير لايقة بكل فرض وذلك لانه بمقتضى ماسبق يظهر لنا ان نسب الجيوب وجيوب التمام الخ الى $\frac{1}{2}$ القطر فى الفرض الثانى كنسب الجيوب وجيوب التمام اليه فى الفرض الاول فحينئذ لا يحتاج فى النتايج المعلومة الا لتغيير الكميات جا ح وظا ك الخ بكميات $\frac{\text{جا ح}}{\text{نق}}$ و $\frac{\text{ظا ك}}{\text{نق}}$ الخ

فاذا فرض

فاذا فرض مثلاان بين قوسى ح و ى النسبة

$$ظا ى = \frac{ا - جتح}{ا + حاح}$$ يحدث بالوضع

$$\frac{ظا ى}{نق} = \frac{ا - \frac{جتح}{نق}}{ا + \frac{حاح}{نق}}$$

وبالاختصار من غير تبديل نق بفرض آخر يحدث

$$ظا ى = \frac{نق(نق - جتح)}{نق + حاح}$$

وينبغى التنبيه الى ان الصلول المطلق لنصف القطر هو ا وغيره هو نق كما فى البعد الذى يساوى ميترا اوميترين فحينئذ نصف القطر لا انتهاء له وفى الحقيقة كل خط مثلثى لزاوية معلومة معين باعداد مختلفة بحسب فرض نصف القطر لكن لهذه الاعداد مع العدد الذى يبين $\frac{1}{2}$ القطر نسبة واحدة وهذه النسبة هى التى تجرى عليها الحسابات فقط

فى بيان ارتباطات الخطوط المثلثية بعضها ببعض

---

(٢٠)

مثلثات شكل (١) تعرف منها النسب الآتية بين الستة خطوط المثلثية ولنشرع فى تفصيل ذلك فنقول

اولا مثلث وم ب من حيث انه قائم الزاوية يحدث عنه

$$\overline{مب}^2 + \overline{وب}^2 = \overline{وم}^2$$

وثانيا مثلثا وم ب و وت ا من حيث انهما متشابهان يحدث عنهما

ات : م ب :: وا : وب و وت : وم :: وا : وب

وثالثا مثلثا وم ك و وط ـ يحدث عنهما ايضا

سط : مك :: وس : وك و وط : وم :: وس : وك

ولنفرض ان قوس ام = ح و نصف قطر وم = نق ثم نضع رموز الخطوط المثلثية عوضا عنها بان نضع جا ح عوضا عن م ب و جت ح عوضا عن وب الخ فالخمس متناسبات السابقة يحدث عنها

(١) جا٢ ح + جت٢ ح = نق٢

(٢) ظا ح = نق جا ح / جت ح

(٣) ظت ح = نق جت ح / جا ح

(٤) قا ح = نق٢ / جت ح

(٥) قت ح = نق٢ / جا ح

فاما قانون (١) فيستعمل لتعيين الجيب بواسطة معرفة جيب التمام وبالعكس فاذا علم جا ح يعلم

جت ح = ± √(نق٢ − جا٢ ح) فيحدث معنا مقداران متساويان ومختلفا الاشارة لان جيبي التمام وب و وبَ المتساويين والمختلفي الوضع يقابلان جيبا واحدا هو وك

واما قوانين (٢) (٣) (٤) (٥) فيعرف منها مقادير الظل والقاطع الخ اذا علمت مقادير الجيب وجيب التمام

(٢١)

ولاجل تطبيقها على الاعمال يؤخذ المقدار جا ٣٠ = ½ نق الذى سلف فى بند (٤) وبواسطته يسهل اولا حساب جيب تمام ٣٠° و ظله وقاطعه ثم اذا اعتبر ان تمام ٣٠ هو ٦٠ امكن عمل هذا الجدول

جا ٣٠° = جت ٦٠° = نق / ٢

ظا ٣٠° = ظت ٦٠° = نق √٣ / ٣

قا ٣٠° = قت ٦٠° = $\frac{٢ \text{ نق } \sqrt{٣}}{٣}$

جت ٣٠° = جا ٦٠° = $\frac{\text{نق } \sqrt{٣}}{٣}$

ظت ٣٠° = ظا ٦٠ = نق $\sqrt{٣}$

قت ٣٠ = قا ٦٠ = ٢ نق

(٢٢)

القوانين السابقة فى بند (٢٠) وان كانت ناتجة من الشكل الذى فيه قوس ح < ٩٠° مطردة ويظهر ذلك بسهولة اذالم تعتبر الا المقادير المطلقة للخطوط المثلثية لان هذه الخطوط يتكون منها دائما مثلثات قوائم الزاوية ومتشابهة يمكن ان يحدث عنها نتائج كالسابقة فى بند (٢٠) ولا يخفى اننا اذا اعتبرنا دائما الاشارات اللازمة لكل منها لا يتغير قانون (١) لاحتوائه على مربعات فقط فحينئذ لا يبقى علينا الا معرفة هل للظل والقاطع الخ فى بقية القوانين اشارات مطابقة لاوضاعها

وحيث ان الجيب وجيب التمام فى الربع الاول من المحيط اعنى من ٠ الى ٩٠° موجبات يحدث من القوانين الاربعة مقادير موجبة كما هو الواقع وحيث ان الجيب موجب وتمام الجيب سالب فى الربع الثانى تكون مقادير الظل والقاطع وظل التمام سالبة واما تمام القاطع فيبقى موجبا على حاله والشكل هو المتكفل ببيان الاشارات اللازم ان تكون لهذه الخطوط وحيث ان الجيب وجيب التمام فى الربع الثالث من المحيط سالبان يكون مقدارا (٢) و (٤) موجبين مع ان مقدارى (٣) و (٥) سالبان وهذا ما يلزم بوضع الاربعة خطوط ومن حيث ان الجيب سالب وجيب التمام موجب فى الربع الرابع من المحيط فالمقادير (٢) و (٤) و (٥) سالبة والمقدار (٣) موجب ويظهر ذلك من الشكل وحيث زادت الاقواس عن ٣٦٠ فالجيوب وجيوب التمام لقوس ما كقوس ٣٦٠ + ح ترجع لهما مقادير واشارات كالتى لقوس ح بعينها فحينئذ ينتج من القوانين الاربعة

نتايج كالتى سبقت بعينها وفى الحقيقة ظل قوس ٣٦٠° + ح وقاطعه الخ يلزم ان يكون لهما مقادير كمقادير ظل وقاطع قوس ح بعينها

ولنفرض الاقواس سالبة فنقول

حيث ان جا (ــح) = ــ جا ح و جت (ــح) = جت ح

كما سبق فى بند (١١) ينتج من تغيير اشارة القوس ان مقادير الظل والقاطع وظل التمام وقاطع التمام المعلومة فى القوانين تأخذ اشارات مختلفة بدون ان يتغير عظمها مع ان القاطع يبقى على حاله وهذه النتايج هى التى بينها الشكل بعينها

ويمكن ان يخاف ان قوانين اقواس ٠° و ٩٠° و ١٨٠° الخ السابقة غير صحيحة وحينئذ لا توجد مثلثات ولكن يشاهد بسهولة ان هذه القوانين يحدث عنها نتايج موافقة لهذه الاقواس فاذا فرضنا مثلا ان ح = ٩٠° يحدث جا ٩٠° = نق و جت ٩٠° = ٠ وحينئذ يصير ظا ٩٠° = لا و قا ٩٠° = لا و ظت ٩٠° = ٠ و قت ٩٠° = نق فهذه المقادير هى التى يلزم ايجادها حينئذ ولينتبه الى ان المقدار ظا ٩٠ = لا يجب ان يكون له علامتا الالتباس ± لان المقدار المذكور هو نهاية الظلال الموجبة التى تحدث معنا بازدياد القوس من ٠ الى ٩٠ ونهاية الظلال السالبة التى تحدث معنا ايضا بنقص القوس من ١٨٠ الى ٩٠ وهذا التنبيه يجرى فى بقية الخطوط المثلثية الصالحة لان تصير غير متناهية

ويمكن ان يستنتج من ذلك ان عموم القوانين الخمسة ليس مقيدا بشئ

(٢٣)

قد اكتفى فى عمومية قانونى (٤) و (٥) بالبرهنة على عمومية قانونى (٢) و (٣) وذلك ان قانونى (٤) و (٥) يمكن استنتاجهما من قانونى (٢) و (٣) بوضع ٩٠° ــ ح عوضا عن ح فيهما وبالجملة فكلما وجد ارتباط بين الخطوط المثلثية وبرهن على جميع مقادير الاقواس الممكنة

يصح ان يبدل كل من هذه الاقواس بتمامه وذلك يرجع الى تغيير الجيوب والظلال والقواطع الخ بجيوب التمام وظلال التمام وقواطع التمام وبالعكس

(٢٤)

الارتباطات الخمسة (١) (٢) (٣) (٤) (٥) يمكن ان يستنتج منها قوانين اخر ولنذكر المشهور منها فنقول

اولا اذا ضرب قانونا (٢) (٤) فى بعضهما احدث

$$\text{ظا}\,ح \times \text{ظت}\,ح = \text{نق}^{٢} \qquad (٦)$$

اعنى ان نصف القطر وسط متناسب بين الظل وظل التمام وهذه النتيجة يمكن ان تنتج من المثلثين المتشابهين وتا و وطس

وثانيا ينتج انا من قانون (٢)

$$\text{نق}^{٢} + \text{ظا}^{٢}\,ح = \text{نق}^{٢} + \frac{\text{نق}^{٢}\,\text{جا}^{٢}\,ح}{\text{جت}^{٢}\,ح} = \frac{\text{نق}^{٢}(\text{جا}^{٢}\,ح + \text{جت}^{٢}\,ح)}{\text{جت}^{٢}\,ح}$$

وحيث ان $\text{جا}^{٢}\,ح + \text{جت}^{٢}\,ح = \text{نق}^{٢}$ و $\text{قا}^{٢}\,ح = \frac{\text{نق}^{٤}}{\text{جت}^{٢}\,ح}$ يحدث

$$\text{نق}^{٢} + \text{ظا}^{٢}\,ح = \text{قا}^{٢}\,ح \qquad (٧)$$

وهذا القانون واضح فى المثلث القائم الزاوية وتا وبمثل هذه الطريقة يوجد هذا القانون

$$\text{نق}^{٢} + \text{ظت}^{٢}\,ح = \text{قت}^{٢}\,ح \qquad (٨)$$

وهذا القانون ينتج من السابق بلا واسطة بوضع $٩٠^{\circ} - ح$ بدل $ح$

وثالثا ينتج من قانونى (٣) و (٥)

$$\frac{١}{\text{قا}\,ح} = \frac{\text{جت}\,ح}{\text{نق}^{٢}} \quad \text{و} \quad \frac{١}{\text{قت}\,ح} = \frac{\text{جا}\,ح}{\text{نق}^{٢}}$$

وباضافة المربعات والتنبيه على ان $\text{جت}^{٢}\,ح + \text{جا}^{٢}\,ح = \text{نق}^{٢}$

يحدث
$$\frac{١}{\text{قا}^{٢}\,ح} + \frac{١}{\text{قت}^{٢}\,ح} = \frac{١}{\text{نق}^{٢}} \qquad (٩)$$

وبالجملة فى علم احد الخطوط المثلثية الستة فالارتباطات الخمسة (١) (٢) (٣) (٤) (٥) تستعمل لمعرفة الخطوط الخمسة الباقية ولا يحتاج ذلك الا الاجراء حل سهل لمعادلات فاذا اريد مثلا ايجاد الجيب وجيب التمام بواسطة الظل تؤخذ معادلتا (١) و (٢) اللتان هما

$$\text{جا}^2 \text{ح} + \text{جت}^2 \text{ح} = \text{نق}^2 \quad \text{و} \quad \text{ظا ح} = \frac{\text{نق جا ح}}{\text{جت ح}}$$

ومن هاتين المعادلتين تستخرج مقادير جاح و جت ح ومن المعادلة الثانية يحدث نق^2 جا^2 ح = ظا^2 ح جت^2 ح وبواسطة الاولى يحدث بسهولة

$$\text{جا ح} = \frac{\pm \text{نق ظا ح}}{\sqrt{\text{نق}^2 + \text{ظا}^2 \text{ح}}} \quad \text{و} \quad \text{جت ح} = \frac{\pm \text{نق}^2}{\sqrt{\text{نق}^2 + \text{ظا}^2 \text{ح}}}$$

وعلامتا $\pm$ يدلان على انه يوجد جيبان وجيبا تمام متساويان ومتقابلان فى الوضع ومقابلان لظل واحد وهذا مبين فى الشكل ولابد من اخذ الاشارات العليا مع بعضها والسفلى كذلك والا فلا يوجد

$$\frac{\text{نق جا ح}}{\text{جت ح}} = \text{ظا ح}$$

فى بيان تركيب القوانين التى يستخرج منها ح + ى و ح ـ ى وتمامى جيبهما

---

(٢٦)

المسئلة المراد حلها هى ان المعلوم جيبا قوسى ح و ى وجيبا تماميهما والمطلوب ايجاد جيب وجيب تمام مجموعهما وتفاضلهما

والجواب ان نفرض كما فى شكل (٤) ان قوس اب = ح و قوس ب ث = ث ى = ى ونوصل ون ر ث ى و $\frac{1}{2}$ قطر وب الذى يقطعه عمودا عليه فى منتصف ك ونوصل ايضا $\frac{1}{2}$ قطر وا والاعمدة ب پ و ث ر و ى ط فيحدث

ب پ = جا ح و وپ = جت ح و ث ك = جا ى و وك = جت ى

و اث = ح + ء و ثر = جا (ح+ء) و ور = جت (ح+ء)
وا ء = ح ــ ء و ءط = جا (ح ــ ء) و وط = جت (ح ــ ء)
وننزل ايضا كه عمودا على وا ونمد كف و ءح موازيا الى او
فثلثا ثكف و كءح يكونان متساويين لان زواياهما متساوية واضلاع
ثك = كء فيكون ضلع ءح = كف و حك = ثف فبهذا الفرض
يحدث

جا (ح+ء) = ثر = فر + ثف = كه + ثف
جت (ح+ء) = ور = وه ــ هر = وه ــ كف
جا (ح ــ ء) = ءط = كه ــ كح = كه ــ ثف
جت (ح ــ ء) = وط = وه + ءح = وه + كف

ومثلث وسپ مشابه لمثلث وكه لتوازي خطي سپ و كه
كما انه مشابه لمثلث ثكف لكون اضلاعهما المتناظرة اعمدة على بعضها
فحينئذ ينتج

كه : سپ :: وك : وس او كه : جاح :: جت ء : نق
وه : وپ :: وك : وس او وه : جت ح :: جت ء : نق
ثف : وپ :: ثك : وس او ثف : جت ح :: جا ء : نق
كف : سپ :: ثك : وس او كف : جاح :: جا ء : نق

ومن هذه المتناسبات يحدث

$$\text{كه} = \frac{\text{جاح جت ء}}{\text{نق}} \quad \text{و} \quad \text{وه} = \frac{\text{جت ح جت ء}}{\text{نق}} \quad \text{و}$$

$$\text{ثف} = \frac{\text{جت ح جاء}}{\text{نق}} \quad \text{و} \quad \text{كف} = \frac{\text{جاح جاء}}{\text{نق}}$$

وبوضع هذه المقادير في جا (ح+ء) و جت (ح+ء) الخ يحدث

$$\text{(١) جا (ح+ء)} = \frac{\text{جاح جت ء + جت ح جاء}}{\text{نق}}$$

$$(٢)\ \text{جت}\ (ح+ء) = \frac{\text{جت ح جت ء} - \text{جا ح جا ء}}{\text{نق}}$$

$$(٣)\ \text{جا}\ (ح-ء) = \frac{\text{جا ح جت ء} - \text{جت ح جا ء}}{\text{نق}}$$

$$(٤)\ \text{جت}\ (ح-ء) = \frac{\text{جت ح جت ء} + \text{جا ح جا ء}}{\text{نق}}$$

(٢٧)

يظهر من الشكل الذى استعملناه انه قاصر قصورا ما على القوانين السابقة لانه مفروض فيه ان قوسى ح و ء موجبان وان مجموعهما ح+ء < ٩٠° وان ح اكبر من ء فى القوانين المتعلقة بكمية ح-ء مع ان الصحيح انه يمكن تحويل الرسوم بسهولة الى كل حالة من الاحوال الباقية لكن هذه الاحوال عديدة فيعسر علينا بهذه الطريقة معرفة كون القوانين عامة ام لا ولنذكر الطريقة المختارة فنقول

اولا يمكن ان يحذف فى قانونى (٣) و (٤) قيد ح > ء وذلك لانه متى كان ح < ء يعرف بمقتضى ما فى بند (١١) انه يحدث

جا (ح-ء) = -جا (ء-ح) جت(ح-ء) = جت (ء-ح)

لكن حيث ان ء > ح يمكن بواسطة قانونى (٣) و (٤) استنتاج جا(ء-ح) و جت(ء-ح) بوضع ح بدل ء و ء بدل ح وحينئذ يشاهد ان القانون الاول لم تتغير فيه الا الاشارة واما الثانى فعلى حاله وحينئذ تنتج لنا القوانين التى تحت الكمية جا (ح-ء) و جت (ح-ء) فى الحالة التى فيها ح > ء وعلى هذا فالقوانين الاربعة تتأتى فى جميع الحالات التى فيها ح و ء موجبان ومجموعهما ح+ء < ٩٠° وحينئذ يجوز ان يقدر فى القوانين لكل من هذه الاقواس اى مقدار كان بين ٠ و ٤٥°

وثانيا انه حيث كان يمكن استخراج القوانين المتعلقة بتفاضل ح-ء من القوانين التى تفيد جا (ح+ء) بوضع -ء بدل ء يكون قانونا (١) و (٢) صالحين لمقادير ح التى بين ٠° و ٤٥° ولجميع

مقادير د التي بين — ٤٥° و + ٤٥° وانا اقول حينئذ ان هذين القانونين صالحان لمقادير كمية ح السالبة مأخوذة من ٠ الى — ٤٥°
فاذا فرضنا ان ع < ٤٥° وان ح = — ع يحدث

جا(ح + د) = جا(— ع + د) = — حا(ع — د) و

جت(ح + د) = حت (— ع + د) = جت (ع — د)

وحيث ان قوسي ع و — د داخلان في نهاية المقادير الثابت فيهما قانونا (١) و(٢) ينتج

جا(ح + د) = — حا(ع — د) = (— حا ع حت د + جت ع حا د) / نق

جت (ح + د) = جت (ع — د) = (حت ع جت د + حا ع حا د) / نق

وحيث ان ح = — ع ينتج لنا كما في بند (١١)

جا ع = — حا ح و جت ع = حت ح

وحينئذ يرجع القانونان السابقان الى قانوني (١) و(٢)

وثانيا نبرهن الآن على انه يمكن في قانوني (١) و(٢) ان تزاد نهايات كميتي ح و د السالبة والموجبة الى غير نهاية فيفرض ان ح = ٩٠° + ع
وان ع قوس ما دائر بين — ٤٥° و+ ٤٥° فبأخذ تمامهما يوجد

حا (ح + د) = حا (٩٠° + ع + د) = جت (— ع — د) = جت (ع + د) = (جت ع جت د — حا ع حا د) / نق

جت (ح + د) = جت (٩٠° + ع + د) = جا (— ع — د) = — جا (ع + د) = (— جا ع جت د — جت ع جا د) / نق

لكن بالاختصارات المعلومة يوجد

جاح = جا(٩٠° + ع) = جت(− ع) = جت ع

جت ح = جت (٩٠° + ع) = جا(− ع) = − جا ع

فحينئذ يمكن ابدال جت ع بكمية جا ح وجا ع بكمية − جت ح وبهذه الطريقة يرجع الى قانونى (١) و (٢) لكن اذا جعل ع بين − ٤٥° و + ٤٥° فقوس ٩٠° + ع او ح يمر بجميع المقادير التى من ٤٥° الى ١٣٥° وحينئذ يشاهد ان نهاية ح الموجبة تزداد حتى تصل الى ١٣٥ وبتكرار هذا البرهان يتضح ان هذه النهاية يمكن ان تزداد ٩٠° و ٩٠° ... وهكذا الى غير نهاية

ثم ان البرهان المذكور فى الحالة الثانية وهو البرهان على ان قانونى (١) و(٢) كما يصلحان لمقادير ح الموجبة الاقل من ٤٥° يصلحان ايضا لمقادير هذه الكمية السالبة يمكن ان يصلح للحالة التى فيها نهاية ح الموجبة تخالف ٤٥° بحيث كانا صالحين لاى مقدار موجب من مقادير ح يكونان صالحين لاى مقدار سالب من مقاديرها

وظاهر انه يمكن اجراء البراهين التى سبقت فى قوس ب على قوس ح اى انه يمكن ان يزاد كل من نهايتيه الى غير نهاية وبهذا يثبت ان قانونى (١) و(٢) صالحان لاى مقدار كان لقوس ح و د وكذلك قانونا (٣) و(٤) بالضرورة

فى بيان قوانين ضرب الاقواس وقسمتها

---

(٢٨)

ولنفرض من الآن فصاعدا ان نق = ١ بحيث ان الجيوب وجيوب التمام الخ لا تعتبر الا نسبا بسيطة كما وضح ذلك فى بند (١٨) وعلى هذا تصير القوانين التى فى بند (٢٠) و(٢٦) هكذا

$$جا^2 ح + جت^2 ح = ١$$

$$ظا ح = \frac{جا ح}{جت ح}$$

$$ظت ح = \frac{جت ح}{جا ح}$$

$$قا ح = \frac{١}{جت ح}$$

$$قت ح = \frac{١}{جا ح}$$

$$جا(ح \pm ء) = جا ح\ جت ء \pm جت ح\ جا ء$$

$$جت(ح \pm ء) = جت ح\ جت ء \mp جا ح\ جا ء$$

(٢٩)

اذا تقرر هذا نتج من فرضنا ح = ء فى مقدارى جا(ح + ء) و جت (ح + ء) هذان القانونان

$$جا ٢ ح = ٢ جا ح\ جت ح \quad (١)$$

$$جت ٢ ح = جت^2 ح - جا^2 ح \quad (٢)$$

وهما يستعملان لحساب جيب ضعف قوس اذا علم جيب هذا القوس وجيب تمامه

(٣٠)

فاذا فرضنا ان ء = ٢ ح حدث من المقادير المتقدمة اولا

$$جا ٣ ح = جا ح\ جت ٢ ح + جت ح\ جا ٢ ح$$

$$جت ٣ ح = جت ح\ جت ٢ ح - جا ح\ جا ٢ ح$$

وبوضع مقادير جا ٢ ح و جت ٢ ح عوضا عنهما واختصار الحواصل بواسطة ارتباط $جا^2 ح + جت^2 ح = ١$ يحدث

$$\text{جا}٣\text{ح} = ٣\,\text{جاح} - ٤\,\text{جا}^{٣}\text{ح} \qquad (٣)$$

$$\text{جت}\,٣\text{ح} = ٤\,\text{جت}^{٣}\text{ح} - ٣\,\text{جتح} \qquad (٤)$$

وبالاستمرار على هذه الكيفية يرتقى الى مضاريب ٤ح و ٥ح و ٦ح الخ وبالجملة فهنالك قوانين عمومية لضرب الاقواس تاتى فى الباب الرابع

(٣١)

ولنشرع الآن فى القوانين المتعلقة بتقسيم الاقواس فنفرض اولا ان المراد ايجاد جيب نصف قوس وجيب تمامه فاذا ابدلنا ح فى قوانين (١) و (٢) بكمية $\frac{١}{٢}$ ح حدث

$$٢\,\text{جا}\,\tfrac{١}{٢}\text{ح}\ \text{جت}\,\tfrac{١}{٢}\text{ح} = \text{جاح} \qquad (٥)$$

$$\text{جت}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\text{ح} - \text{جا}^{٢}\tfrac{١}{٢}\text{ح} = \text{جتح} \qquad (٦)$$

ومعلوم انه يوجد

$$\text{جت}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\text{ح} + \text{جا}^{٢}\tfrac{١}{٢}\text{ح} = ١ \qquad (٧)$$

فاذا علم جت ح فلا يحتاج الا لحل معادلتى (٦) و (٧) فبطرح الاولى من الثانية ثم اضافتها اليها يحدث

$$\text{جا}\,\tfrac{١}{٢}\text{ح} = \sqrt{\frac{١ - \text{جتح}}{٢}} \quad \text{و} \quad \text{جت}\,\tfrac{١}{٢}\text{ح} = \sqrt{\frac{١ + \text{جتح}}{٢}}$$

وهذان القانونان هما اللذان يستعملان لمعرفة جا $\frac{١}{٢}$ ح و جت $\frac{١}{٢}$ ح اذا علم جت ح ويلزم فى هذين القانونين التنبيه على ان علامة الجذر تكون مسبوقة باشارة $\pm$

ثم ان سبب ايجاد مقدارين متساويين ومختلفى الاشارة لكل من مجهولى جا$\frac{١}{٢}$ح وجت $\frac{١}{٢}$ح سهل بالتنبيه اولا على ان قوس ح ليس داخلا فى هذه المقادير بل الداخل جيب تمامه لان هذه المقادير تفيد ايضا جيب وجيب تمام $\frac{١}{٢}$ جميع الاقواس التى جيب تمامها واحد وبمقتضى ما سبق فى بند (١٥)

تتعين هذه الاقواس من قانون

س = ٢ك ف ± ع مفروضا فيه ان حرف ع اصغر قوس موجب مقابل لجيب التمام المعلوم وان ف نصف المحيط وان ك عددا صحيح فيلزم حينئذ ايجاد جميع مقادير كميتى جا $\frac{١}{٢}$ ح وجت $\frac{١}{٢}$ ح المحصورة فى

جا (ك ف ± $\frac{١}{٢}$ ع) و جت (ك ف ± $\frac{١}{٢}$ ع)

فان كان ك زوجا تكون كمية ك ف احد مضاريب ٣٦٠° ويمكن حذفها بدون تغيير الجيب وجيب التمام كما سبق فى بند (١٠) وبذلك يحدث

جا (± $\frac{١}{٢}$ ع) = ± جا $\frac{١}{٢}$ ع و

جت (± $\frac{١}{٢}$ ع) = جت $\frac{١}{٢}$ ع

وان كان ك فردا امكن ان تحذف ايضا كمية ك ف لكن مع تغيير اشارات الجيب وجيب التمام كما سبق فى بند (١٠) فبذلك يحدث

− جا (± $\frac{١}{٢}$ ع) = ± (جا $\frac{١}{٢}$ ع) و

− جت (± $\frac{١}{٢}$ ع) = − (جت $\frac{١}{٢}$ ع)

فيشاهد حينئذ انه قد وجد معنا مقداران متساويان ومختلفا الاشارة لمجهولى جا $\frac{١}{٢}$ ح و جت $\frac{١}{٢}$ ح

(٣٢)

فاذا كان المعلوم هو الجيب بدل جيب التمام كفى ان يوضع فى قانونى (٨) مقدار جت ح الذى هو $\sqrt{١ - جا^٢ ح}$ بدلا عنه وحيث ان هذا الجذر مسبوق باشارة ± يكون لكل من مجهولى جا $\frac{١}{٢}$ ح وجت $\frac{١}{٢}$ ح اربعة مقادير

ويمكن ايجاد هذه المقادير بطريقة اخرى وذلك بان يوخذ قانونا (٥) و (٧) اللذان هما

٢ جا $\frac{١}{٢}$ ح جت $\frac{١}{٢}$ ح = جا ح

جت^٢ $\frac{١}{٢}$ ح + جا^٢ $\frac{١}{٢}$ ح = ١

ومن هذين القانونين تستخرج مقادير جا $\frac{1}{2}$ ح و جت $\frac{1}{2}$ ح وباضافة الاول الى الثانى ثم طرحه منه واخذ جذر الحاصل والباقى يحدث

$$جت \frac{1}{2} ح + جا \frac{1}{2} ح = \sqrt{1 + جا ح}$$

$$جت \frac{1}{2} ح - جا \frac{1}{2} ح = \sqrt{1 - جا ح}$$

ومن ذلك تحدث بسهولة المقادير المطلوبة التى هى

$$جا \frac{1}{2} ح = \frac{1}{2} \sqrt{1 + جا ح} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - جا ح} \quad (٩) -$$

$$جت \frac{1}{2} ح = \frac{1}{2} \sqrt{1 + جا ح} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - جا ح} \quad (١٠) -$$

وبسبب وجود علامتى الجذر فى هاتين الكميتين يكون لكل منهما اربع مقادير وذلك ان هاتين الكميتين لا بد وان يفيدا جيب وجيب تمام نصف جميع الاقواس التى جيوبها واحدة لكن حيث كانت هذه الاقواس بمقتضى ما سبق فى بند (١٤) ناتجة من

$$س = ٢ك ف + ع \quad و \quad س = (٢ك + 1) ف - ع$$

يجب ان يكون مقدارا جا $\frac{1}{2}$ح و جت $\frac{1}{2}$ح مفيدين لجيب وجيب تمام الاقواس المبينة فى

$$ك ف + \frac{1}{2} ع \quad و \quad (ك + \frac{1}{2}) ف - \frac{1}{2} ع$$

لكنه يمكن حذف ك ف مع ابقاء اشارات الجيب وجيب التمام او تغييرهما بحسب كون ك زوجا او فردا فيلزم حينئذ ان يكون لمجهولى جا $\frac{1}{2}$ ح و جت $\frac{1}{2}$ح اربع مقادير هى جا $\frac{1}{2}$ح $= \pm \frac{1}{2}$ ع و جا $\frac{1}{2}$ ح $= \pm$ جا $(\frac{1}{2}ف - \frac{1}{2}ع)$ و جت $\frac{1}{2}$ح $= \pm$ جت $\frac{1}{2}$ ع و جت $\frac{1}{2}$ح $= \pm$ جت $(\frac{1}{2}ف - \frac{1}{2}ع)$ فيشاهد انها متساوية شئ ومختلفة الاشارة فاذا كان ع $= ٩٠°$ يحدث $\frac{1}{2}$ع $= ٤٥°$ و $\frac{1}{2}ف - \frac{1}{2}ع = ٤٥°$ وحينئذ تؤول هذه المقادير الاربعة الى مقدارين

(تنبيه) حيث كان مقدار كمية ف دالا على ١٨٠° ينتج ان كلا من قوسى $\frac{1}{2}$ع و $\frac{1}{2}ف - \frac{1}{2}$ع تمام للاخر وحينئذ تكتب المعادلة السابقة هكذا

$$\text{جا} \tfrac{1}{2} ح = \pm \text{جا} \tfrac{1}{2} ع \quad \text{و} \quad \text{جا} \tfrac{1}{2} ح = \pm \text{جت} \tfrac{1}{2} ع$$

$$\text{جت} \tfrac{1}{2} ح = \pm \text{جت} \tfrac{1}{2} ع \quad \text{و} \quad \text{جت} \tfrac{1}{2} ح = \pm \text{جا} \tfrac{1}{2} ع$$

اعنى ان مقادير جا $\tfrac{1}{2}$ ح عين مقادير جت $\tfrac{1}{2}$ ح وهذا ما تبينه قوانين (٩) و (١٠)

بقى علينا مشكلة يلزم حلها وهى انه كيف يمكن تمييز احد المقادير الاربعة السابقة لينتخب لكمية جا $\tfrac{1}{2}$ ح و جت $\tfrac{1}{2}$ ح اذا علم قوس ح وجيبه وذلك لانه لا يلزم ان يؤخذ الا مقدار واحد

وحلها ان يعتبر لاجل الاختصار جا $\tfrac{1}{2}$ ح فقط وباخذ الجذور مع اشاراتها المختلفة تكتب المقادير الاربعة هكذا

$$\text{جا} \tfrac{1}{2} ح = \pm \tfrac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \text{جا} ح} - \sqrt{1 - \text{جا} ح} \right)$$

$$\text{جا} \tfrac{1}{2} ح = \pm \tfrac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \text{جا} ح} + \sqrt{1 - \text{جا} ح} \right)$$

فيظهر لنا اولا ان المقدارين الاولين متساويان ومختلفا الاشارة وكذلك المقداران الاخيران ثم اذا ربع اثنان من الاربعة صارا $< \tfrac{1}{2}$ والاخريان بالتربيع يصيران $> \tfrac{1}{2}$ وحيث كان معلوما كما فى بند (٨) ان جا^2 ٤٥° $= \text{جت}^2$ ٤٥° $= \tfrac{1}{2}$ يكون المقداران الاولان بالغاء الاشارات اصغر من جا ٤٥° والاخيران اكبر منه لكن لا يخفى انه اذا علم قوس سهل بالضرورة ان يعين هل جيب $\tfrac{1}{2}$ هذا القوس موجب او سالب وهل هو اصغر من جيب ٤٥ او اكبر منه وبذلك يبطل كلما ليس منتهيا وهذه البراهين تجرى فى جيب التمام

فاذا فرضنا مثلا ان ح $<$ ٩٠° يكون جا $\tfrac{1}{2}$ ح موجبا واقل من جا ٤٥° و جت $\tfrac{1}{2}$ ح موجبا ايضا لكنه اكبر من جت ٤٥° فيلزم حينئذ اخذ المقادير التى فى قوانين (٩) و (١٠) مع الاشارات السابقة لها

وهذه القوانين توافق كما هو مشاهد الاحوال التى فيها القوس اقل من ٩٠° كبقية القوانين المثلثية الكثيرة الاستعمال فى الاحوال السابقة

ولنتكلم الآن على تقسيم الاقواس الى ثلاثة اقسام فنقول اذا وضعنا $\frac{1}{3}$ ح عوضا عن ح فى قوانين (٣) و (٤) التى سبقت فى بند (٣٠) تصير هذه القوانين هكذا

$$\text{جا ح} = ٣\ \text{جا}\ \tfrac{1}{3}\ \text{ح} - ٤\ \text{جا}^{٣}\ \tfrac{1}{3}\ \text{ح}$$

$$\text{جت ح} = ٤\ \text{جت}^{٣}\ \tfrac{1}{3}\ \text{ح} - ٣\ \text{جت}\ \tfrac{1}{3}\ \text{ح}$$

ولنفرض مثلا ان جت ح معلوم والمطلوب ايجاد مقدار جت $\frac{1}{3}$ ح فنضع جت ح = ء و جت $\frac{1}{3}$ ح = ص فتصير المعادلة الثانية هكذا

$$\text{ص}^{٣} - \tfrac{3}{4}\ \text{ص} - \tfrac{1}{4}\ \text{ء} = ٠$$

وهذه هى المعادلة المطلوب حلها لاجل ايجاد جت $\frac{1}{3}$ ح ولنبرهن بدون احتياج الى توضيحات جبرية على ان جذور هذه المعادلة الثلاثة حقيقية

فمن حيث ان جيب التمام هنا معلوم وقانون الاقواس المقابلة لجيب التمام المذكور هو ٢ ك ± ع كما سبق فى بند (١٥) تكون جذور معادلة (١١) محصورة فى معادلة

$$\text{ص} = \text{جت}\left(\frac{\text{٢كف} \pm \text{ع}}{٣}\right)$$

ولا يخفى ان العدد الصحيح الذى هو ك ليس له الا احد المقادير الثلاثة التى هى ٣ ن و ٣ ن + ١ و ٣ ن − ١ بفرض ان ن عدد صحيح بان نفرض على التوالى ان ك = ٣ ن و ك = ٣ ن + ١ و ك = ٣ ن − ١ فبحذف الدوائر غير المحتاج اليها نجد

$$ص = جت \frac{٣ ق × ٢ ف ± ع}{٣} = جت (٢ ق ف ± \frac{ع}{٣}) = جت (± \frac{ع}{٣}) = جت \frac{ع}{٣}$$

$$ص = جت \frac{(٣ ق + ١) ٢ ف ± ع}{٣} = جت (٢ ق ف + \frac{٢ ف}{٣} ± \frac{ع}{٣}) = جت (\frac{٢ ف}{٣} ± \frac{ع}{٣})$$

$$ص = جت \frac{(٣ ق - ١) ٢ ف ± ع}{٣} = جت (- \frac{٢ ف}{٣} ± \frac{ع}{٣}) = جت (\frac{٢ ف}{٣} ∓ \frac{ع}{٣})$$

فيشاهد ان المقدارين الاخيرين عين المقدارين اللذين قبلهما فحينئذ لا يوجد من هذا كله الا ثلاثة مقادير مختلفة وهى

$$ص = جت \frac{ع}{٣} \quad و \quad ص = جت (\frac{٢ ف}{٣} + \frac{ع}{٣}) \quad و \quad ص = جت (\frac{٢ ف}{٣} - \frac{ع}{٣})$$

وقد يتفق ان مقدارين من المقادير السابقة متساويان وذلك كالاول والثالث اذا كان $ع = ف$

ولا نطيل الكلام على تقسيم الاقواس لان ماسبق من التفاصيل كاف للسالك فى هذا الفرض

في بيان القوانين المتعلقة بالاظلال

(٣٤)

ولنشرع الآن فى البحث عن ايجاد ظل مجموع قوسين او فاضلهما متى علم ظل كل من هذين القوسين وبمقتضى الارتباط الذى بين الجيب وجيب التمام والظل كما سبق فى بند (٢٨) يحدث

$$ظا (ح + ى) = \frac{جا (ح + ى)}{جت (ح + ى)}$$

وبابدال جا (ح+ى) و جت (ح+ى) بمقداريهما الذين سبقا فى بند (٢٨) يحدث

$$ظا (ح + ى) = \frac{جا ح جت ى + جت ح جا ى}{جت ح جت ى - جا ح جا ى}$$

ولاجل ان لا توجد الا الاظلال فقط يقسم البسط والمقام على جت ح جت ى

فيحدث

$$\text{ظا}(\text{ح}+\text{ء})=\frac{\dfrac{\text{جاح}}{\text{جتح}}+\dfrac{\text{جاء}}{\text{جتء}}}{1-\dfrac{\text{جاح جاء}}{\text{جتح جتء}}}$$

ولكن $\dfrac{\text{جاح}}{\text{جتح}}=\text{ظاح}$ و $\dfrac{\text{جاء}}{\text{جتء}}=\text{ظاء}$ فحينئذ يحدث

$$\text{ظا}(\text{ح}+\text{ء})=\frac{\text{ظاح}+\text{ظاء}}{1-\text{ظاح ظاء}}\qquad(1)$$

وبالكيفية السابقة يوجد ايضا فاضل هذين القوسين هكذا

$$\text{ظا}(\text{ح}-\text{ء})=\frac{\text{ظاح}-\text{ظاء}}{1+\text{ظاح ظاء}}\qquad(2)$$

(٣٥)

اذا فرض ان $\text{ح}=\text{ء}$ فى القانون السابق (١) يحدث ظل ضعف قوس اذا علم ظل هذا القوس

$$\text{ظا}\,2\text{ح}=\frac{2\,\text{ظاح}}{1-\text{ظا}^2\text{ح}}\qquad(3)$$

وايضا اذا فرض ان $\text{ء}=2\text{ح}$ فى القانون (١) يوجد $\text{ظا}\,3\text{ح}$ الخ

(٣٦)

ولنبحث الآن عن ظل $\frac{1}{2}\text{ح}$ اذا علم ظل ح فنقول بوضع $\frac{1}{2}\text{ح}$ بدل ح فى القانون الاخير تحدث معادلة

$$\frac{2\,\text{ظا}\frac{1}{2}\text{ح}}{1-\text{ظا}^2\frac{1}{2}\text{ح}}=\text{ظا}\,\text{ح}$$

وهذه المعادلة تؤول الى معادلة بدرجة ثانية وهى

$$\text{ظا}^2\tfrac{1}{2}\text{ح}+\frac{2}{\text{ظاح}}\,\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\text{ح}-1=0$$

ومن هذه المعادلة يستخرج

$$\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \frac{1}{\text{ظا ح}}\left(-1 \pm \sqrt{1+\text{ظا}^2\,\text{ح}}\right)$$

وحيث ان حد معادلة (٤) الاخير هو -1 يعلم بدون حل هذه المعادلة ان حاصل ضرب مقدارى ظا $\tfrac{1}{2}$ ح $= -1$ فحينئذ اذا كان اتَ و اتً من شكل (٥) هما المقداران المذكوران والموضوعان بوضع لايق باشاراتهما يكون معنا اتَ × اتً = $\overline{\text{وا}}^2$ وحينئذ تكون زاوية تَوتً قائمة او يكون قوس م مَ = 90° والمآل واحد

وكان يسهل ان يبين بمقتضى هذه المسئلة لاى شئ يكون لظل $\tfrac{1}{2}$ ح مقداران ليس الا لكن تركنا للقارئ هذا العمل الذى لاصعوبة فيه بمقتضى ما تقدم فى الاحوال المشابهة لذلك

(٣٧)

كثيرا ما توجد هذه القوانين

$$\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \sqrt{\frac{1-\text{جت ح}}{1+\text{جت ح}}} \qquad (٥)$$

$$\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \frac{\text{جا ح}}{1+\text{جت ح}} \qquad (٦)$$

$$\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \frac{1-\text{جت ح}}{\text{جا ح}} \qquad (٧)$$

وهذه القوانين تنتج بالسهولة من القوانين السابقة فيوجد

$$\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \frac{\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح}}{\text{جت}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح}} = \sqrt{\frac{1-\text{جت ح}}{1+\text{جت ح}}} \quad \text{انظر (٣١)}$$

$$\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \frac{\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح}\ \text{جت}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح}}{\text{جت}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح}} = \frac{\text{جا ح}}{1+\text{جت ح}} \quad \text{انظر (٣١) و (٢٩)}$$

$$\text{ظا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح} = \frac{\text{جا}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح}}{\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح}\ \text{جت}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ح}} = \frac{1-\text{جت ح}}{\text{جا ح}} \quad \text{انظر (٣١) و (٢٩)}$$

قوانين اخرى كثيرة الاستعمال

(٣٨)

ماسبق فى بند (٢٨) من القوانين المتعلقة بجيب وجيب تمام مجموع القوسين الذى هو ح + د وفاضلهما الذى هو ح − د ينتج عنه كثير من القوانين المستعملة عند الفلكيين ولنقتصر على المشهور منها فنقول

اذا جمع اثنان من تلك القوانين او طرحا من بعضهما يحدث

٢ جا ح حت د = جا (ح+د) + جا (ح−د)

٢ جت ح جا د = حا (ح+د) − حا (ح−د)

٢ جت ح جت د = جت (ح−د) + جت (ح+د)

٢ جا ح حا د = جت (ح−د) − جت (ح+د)

وهذه القوانين تستعمل لتحويل ضرب احد الجيوب فى احد جيوب التمام او تحويل حاصل ضرب جيبى تمام فى بعضهما او جيبين فى بعضهما الى مجموع خطين مثلثيين او فاضلهما

(٢٩)

ولنرمز الى اى قوسين بحرفى هـ , و ونفرض ان ح + د = هـ و ح − د = و فيحدث ح = ½ (هـ + و) و د = ½ (هـ − و) وبوضع هذا المقادير فى القوانين السابقة وتغيير ترتيب الطرفين تصير هكذا

جاهـ + جاو = ٢ جا ½ (هـ+و) جت ½ (هـ−و)

جا هـ − جا و = ٢ جت ½ (هـ+و) حا ½ (هـ−و)

جت هـ + جت و = ٢ جت ½ (هـ+و) جت ½ (هـ−و)

جت و − جت هـ = ٢ حا ½ (هـ+و) حا ½ (هـ−و)

وكثيرا ما تستعمل هذه القوانين فى الحسابات اللوغاريتمية لتحويل مجموع او فاضل الى حاصل ضرب

٤٠

وبالجملة فبالتقسيم والتنبيه عموما على ان

$$\frac{\text{جا ح}}{\text{جت ح}} = \text{ظا ح} = \frac{1}{\text{ظت ح}}$$

ينتج من القوانين السابقة قوانين اخرى كثيرة الاستعمال ايضا هي

$$\frac{\text{جاه} + \text{جاو}}{\text{جاه} - \text{جاو}} = \frac{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})\,\text{جت}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})}{\text{جت}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})\,\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})} = \frac{\text{ظا}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})}{\text{ظا}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})}$$

$$\frac{\text{جاه} + \text{جاو}}{\text{جته} + \text{جتو}} = \frac{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})}{\text{جت}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})} = \text{ظا}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})$$

$$\frac{\text{جاه} + \text{جاو}}{\text{جتو} - \text{جته}} = \frac{\text{جت}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})}{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})} = \text{ظت}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})$$

$$\frac{\text{جاه} - \text{جاو}}{\text{جته} + \text{جتو}} = \frac{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})}{\text{جت}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})} = \text{ظت}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})$$

$$\frac{\text{جاه} - \text{جاو}}{\text{جتو} - \text{جته}} = \frac{\text{جت}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})}{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})} = \text{ظت}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})$$

$$\frac{\text{جته} + \text{جتو}}{\text{جتو} - \text{جته}} = \frac{\text{جت}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})\,\text{جت}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})}{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})\,\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})} = \frac{\text{ظت}\frac{1}{2}(\text{ه}+\text{و})}{\text{ظا}\frac{1}{2}(\text{ه}-\text{و})}$$

ولنخص اول هذه القوانين بهذه العبارة فنقول نسبة مجموع جيبي قوسين الى فاضل هذين الجيبين كنسبة ظل نصف مجموع الجيبين الى ظل نصف فاضلهما

(٤١)

بالاطلاع على بعض مؤلفات هذا العلم يشاهد تحويلات مثلثية لم يتعرض لاصولها فالاوفق حينئذ تحقيقها ولا صعوبة في ذلك

فاذا اريد مثلا تحقيق ارتباط

$$\text{جا}\,(ح+ء)\ \text{جا}\,(ح-ء)=\text{جا}^{2}ح-\text{جا}^{2}ء$$

يبدل اولا جا (ح+ء) وجا(ح−ء) بمقاديرهما السابقة فى بند (٦٨) فيحدث

$$\text{جا}\,(ح+ء)\ \text{جا}\,(ح-ء)=\text{جا}^{2}ح\ \text{جت}^{2}ء-\text{جت}^{2}ح\ \text{جا}^{2}ء$$

ثم يبدل جت² ح و جت² ء بمقداريهما ١ − جا² ح و ١ − جا² ء

وبعد الاختصار توجد المعادلات المطلوبة

واذا اريد تحقيق هذه المعادلة

$$\text{جت}\ ح=\frac{1-\text{ظا}^{2}\frac{1}{2}ح}{1+\text{ظا}^{2}\frac{1}{2}ح}$$

يبدل ظا $\frac{1}{2}$ ح بمقداره $\frac{\text{جا}\frac{1}{2}ح}{\text{جت}\frac{1}{2}ح}$ فيؤول الطرف الثانى الى

$$\frac{\text{جت}^{2}\frac{1}{2}ح-\text{جا}^{2}\frac{1}{2}ح}{\text{جت}^{2}\frac{1}{2}ح+\text{جا}^{2}\frac{1}{2}ح}$$

وحيث كان يعلم من بند (٢٠) و (٢٩) ان

$$\text{جت}^{2}\frac{1}{2}ح+\text{جا}^{2}\frac{1}{2}ح=1\quad\text{و}\quad\text{جت}^{2}\frac{1}{2}ح-\text{جا}^{2}\frac{1}{2}ح=\text{جت}\,ح$$

آل المقدار السابق الى جت ح وبذلك يثبت المطلوب

وها اليك بعض صور نذكرها على سبيل التمرين فنقول

$$\text{جت}\,(ح+ء)\ \text{جت}\,(ح-ء)=\text{جت}^{2}ح-\text{جا}^{2}ء$$

$$\text{ظا}\,(45^{\circ}+ح)=\frac{1+\text{ظا}\,ح}{1-\text{ظا}\,ح}$$

$$\text{جت}\,ح=\frac{1}{1+\text{ظا}\,ح\ \text{ظا}\,\frac{1}{2}ح}$$

$$\text{ظا}\,ح+\text{ظا}\,ء=\frac{\text{جا}\,(ح+ء)}{\text{جت}\,ح\ \text{جت}\,ء}$$

$$\text{ظا}\,ح+\text{ظا}\,ء+\text{ظا}\,هـ=\text{ظا}\,ح\ \text{ظا}\,ء\ \text{ظا}\,هـ$$

والقانون الاخير يفرض فيه ان ح+د+هـ = ١٨٠° وهو يبين انه يمكن اختيار ثلاث كميات مجموعها مساو لحاصل ضربها بطرق عديدة

فى بيان براهين هندسية على القوانين المتقدمة

(٤٢)

قد رأيت بعد ان رتبت بطريق الهندسة قوانين جيب وجيب تمام قوسى ح+د و ح-د انى استعملت الحساب الجبرى لتنتج منها قوانين اخرى ومن هنا نتج ان القوانين الاولى لجميع الاقواس المتقدمة صحيحة كما ان القوانين الاخرى كذلك وهذه خاصية الطرق الجبرية الاصلية ولو استعملنا طرق الرسم الهندسى لتوهم دائما انه لا يمكن تطبيقها الا على الاحوال المبينة فى شكل مخصوص لكن من حيث ان مزيتها تصييرا الحقيقية محسوسة نشرع فى البرهنة على النتائج الاصلية المتقدمة بها فنقول

(٤٣)

اذا كان المعلوم جيب قوس وجيب تمامه والمراد ايجاد جيب وجيب تمام ضعف القوس المذكور يفرض ان قوس اب = بث = ح كما فى شكل (٦) وترسم الخطوط المساحية كما هى مبينة فى الشكل فيحدث

جا ح = اب و جت ح = وب و جا ٢ح = ثك = ٢ بف و جت ٢ح = وك = ون - كف = وف - اف

فالمثلث القائم الزاوية وبا ينتج منه

بف = (اب×وب)/وا و وف = $\overline{\text{وب}}^{٢}$/او و اف = $\overline{\text{اب}}^{٢}$/او

فاذا ابدلت هذه الخطوط المختلفة برموزها المثلثية وفرض ان نصف القطر وا = ١ يحدث

جا ٢ح = ٢بف = ٢ جا ح جت ح

جت ٢ح = وف - اف = جت^{٢} ح - جا^{٢} ح

وهذان القانونان هما قانونا (١) و (٢) المقررين فى بند (٢٩)

(٤٤)

اذا كان المعلوم جت ح والمراد ايجاد جا $\frac{1}{2}$ ح و جت $\frac{1}{2}$ ح

يؤخذ قوس اث = ح كما فى شكل (٧) ويوصل ث ب عمودا على قطر اب ثم يوصل وترا اث و ب ث وكذلك نصف قطرى وى و وه وهذان الخطان يقطعان الوترين المذكورين فى منتصفهما اى فى نقطتى ل و ر فيفرض ان او = ١ اذاً فما يحدث وب = جت ح و اب = ١ ــ جت ح و ب ب = ١ + جت ح و اث = ٢ جا $\frac{1}{2}$ ح و ب ث = ٢ جت $\frac{1}{2}$ ح

وحيث كان كل وتر وسطا متناسبا بين القطر والجزء المجاور له ينتج

اث^{2} = اب × اب او ٤ جا^{2} $\frac{1}{2}$ ح = ٢ (١ ــ جت ح)

ب ث^{2} = اب × ب ب او ٤ جت^{2} $\frac{1}{2}$ ح = ٢ (١ + جت ح)

ومن ذلك تستنتج القوانين المعلومة فى بند (٣١)

وهى جا $\frac{1}{2}$ ح = $\sqrt{\frac{١ ــ جت ح}{٢}}$ و جت $\frac{1}{2}$ ح = $\sqrt{\frac{١ + جت ح}{٢}}$

(٤٥)

اذا كان المعلوم جيب قوس وجيب تمامه والمراد ايجاد جيب ثلاثة امثال ذلك القوس وتمام جيب ثلاثة امثاله

يفرض كما فى شكل (٨) ان نصف القطر وب = ١ وقوس اب = ب ث = ث ى = ح فالمثلث المتساوى الساقين ب وى مشابه لمثلث ب ى ر لان زاوية و ب ى مشتركة فى المثلثين وزاوية ب ى ر التى مقياسها $\frac{1}{2}$ ب ه او ب ى = ب و ى فحينئذ يقال

ب ر : ب ى :: ب ى : و ب ومن هنا ينتج

ب ر = ٤ جا^{2} ح

وبمد ب ح موازيا ب ر يكون ب ح = ب ر = ٤ جا^{2} ح

فالمثلثان المتشابهان ك ح ب و س ب يحدث عنهما

ك ح : ب س :: ب ح : و س ومن ذلك يحدث ك ح = ٤ جا ٣ ح

و ب ك : و ب :: ب ح : و س ومن ذلك يحدث

ب ك = ٤ جا ٢ ح جت ح لكن من حيث ان

جا ٣ ح = ى ك = ى ر + ر ح ـ ك ح = س ى + س ب ـ ك ح = ٣ جا ح ـ ك ح

و جت ٣ ح = و ك = و ب ـ ب ك = جت ح ـ ب ك

ينتج بابدال ك ح و ب ك بمقداريهما التي وجدت سابقا

جا ٣ ح = ٣ جا ح ـ ٤ جا ٣ ح

جت ٣ ح = جت ح ـ ٤ جا ٢ ح جت ح

فالمعادلة الاولى هي قانون (٣) المقرر في بند (٣٠) وبابدال جا ٢ ح

بمقدار ١ ـ جت ٢ ح تصير المعادلة الثانية عين قانون (٤)

(٤٦)

اذا كان المعلوم ظلا لقوسين والمراد ايجاد ظل مجموعهما وظل فاضلهما

يفرض كما في شكل (٩) ان و ا = ١ و ا س = ح و س ث = ى ومن

نهايتي نصفي قطري و ا و و ب يمد خطان مماسان ا ت و س س

ينتهيان كما في الشكل المذكور وينزل عمود س ف على ا و فبموجب منطوق

السؤال يعلم ان س ر = ظا ح و س س = ظا ى فيكون المقصود حينئذ البحث

عن كون ا ت = ظا ح + ى وبسبب تشابه مثلثي و ا ت و و ف س

يحدث

$$\frac{\text{ا ت}}{\text{ا و}} = \frac{\text{س ف}}{\text{و ف}} \quad \text{ومنها ينتج} \quad \text{ظا ح + ى} = \frac{\text{س ف}}{\text{و ف}}$$

وباستخراج س ف من المثلثين المتشابهين س ف ر و و س ر يحدث

$$\frac{\text{س ف}}{\text{س ر}} = \frac{\text{و س}}{\text{و ر}} \quad \text{ومن هذا ينتج} \quad \text{س ف} = \frac{\text{ظا ح + ظا ى}}{\text{و ر}}$$

ولاجل ايجاد و ف ننبه على انه بمقتضى دعوى نظرية معلومة يحدث

سر^{٢} = ور^{٢} + وس^{٢} − ٢ ور × وف

ولكن حيث كان سر^{٢} = (سر + سس)^{٢} = سر^{٢} + سس^{٢} + ٢ سر × سس

يكون سر^{٢} + سس^{٢} + ٢ سر × سس = ور^{٢} + وس^{٢} − ٢ ور × وف

ومن هذا يستخرج

٢ ور × وف = ور^{٢} − سر^{٢} + وس^{٢} − سس^{٢} − ٢ سر × سس = ور^{٢} −

٢ سر × سس = ٢ − ٢ ظا ح ظا ء

وحينئذ وف = (١ − ظا ح ظا ء) ÷ ور

فلو ابدل سف و وف فى ظا (ح + ء) بمقاديرهما لنتج القانون المعلوم فى بند (٣٤) الذى هو

ظا (ح + ء) = (ظا ح + ظا ء) ÷ (١ − ظا ح ظا ء)

وبهذه الكيفية السهلة يوجد مقدار ظا (ح − ء) وحينئذ يلزم استعمال شكل (١٠) الذى فيه قوس اث = ح − ء فيشاهد ان الحسابات المتقدمة تجرى ايضا فى هذه الحالة ولكن قد يقع هنا ان سر = ظا ح − ظا ء فعلامة الحد الثانى من بسطى مقادير سف و وف تتغير بحيث يكون

ظا (ح − ء) = (ظا ح − ظا ء) ÷ (١ + ظا ح ظا ء)

(٤٧)

اذا كان المراد اقامة البرهان الهندسى على هذين القانونين

جاهـ + جاو = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ (و + هـ) جت $\frac{١}{٢}$ (هـ − و)

جاهـ − جاو = ٢ جت $\frac{١}{٢}$ (و + هـ) جا $\frac{١}{٢}$ (هـ − و)

فليؤخذ كما فى شكل (١١) اب = هـ و اث = و ويوصل وتر بث ونصف قطر وء الذى يقطعه عمودا فى وسطه فى نقطة هـ وينزل على او اعمدة بب و ثك و ءر و هف ثم يمد هـح موازيا الى او وبمقتضى ذلك الرسم يوجد

ب ب = جاهـ و ت ى = جاو هـ و = $\frac{\text{جاهـ} + \text{جاو}}{٢}$ و ب ح = $\frac{\text{جاهـ} - \text{جاو}}{٢}$

و اى = $\frac{1}{2}$(و + هـ) و ى ر = جا $\frac{1}{2}$(هـ − و)

ور = جت $\frac{1}{2}$(هـ + و) و ب ى = $\frac{1}{2}$(هـ − و) و هـ ب = جا $\frac{1}{2}$(هـ − و)

وهـ = جت $\frac{1}{2}$(هـ − و)

لكن المثلثان المتشابهان وهف و ور يحدث منهما

هف : ىر :: وهـ : وى و بح : ور :: بهـ : وى

ومن ذلك يحدث

هو = $\frac{\text{ىر} \times \text{وهـ}}{\text{وى}}$ و بح = $\frac{\text{ور} \times \text{بهـ}}{\text{وى}}$

وبابدال هذه الخطوط بمقاديرها ثم تضعيفها وفرض ان نصف قطر وى = ١ توجد القوانين المعلومة المتقدمة ويحدث ايضا من المثلثين المذكورين مقادير جت هـ + جت و و جت و − جت هـ

(٤٨)

اذا كان المراد اقامة البرهان الهندسى على ان نسبة مجموع جيبى قوسين الى فاضل هذين الجيبين كنسبة ظل نصف مجموع القوسين الى ظل نصف فاضلهما

فالرسم عين الرسم السابق فى شكل (١١) ويراد على ذلك ان يمد من نقطة ى ظل س ت حين ينتهى فى نقطتى س و ت على امتداد نصفى القطرين وا و وب ثم يمد ايضا ب ث الى نقطة ل فبهذا الوضع ينتج بواسطة المتوازيات

$$\frac{\text{هف}}{\text{بح}} = \frac{\text{هـل}}{\text{بهـ}} = \frac{\text{ىس}}{\text{ىت}}$$

ولكن حيث كان ٢ هو = جاهـ + جاو و ٢ بح = جاهـ − جاو

دس = ظا ا ى = ظا $\frac{1}{2}$(هـ+و) و دت = ظا ى ب = ظا $\frac{1}{2}$(هـ-و) ينتج

$$\frac{\text{جاهـ + جاو}}{\text{جاهـ - جاو}} = \frac{\text{ظا}\frac{1}{2}(\text{هـ+و})}{\text{ظا}\frac{1}{2}(\text{هـ-و})}$$

وبهذا يثبت المطلوب

الباب الثانى

فى بيان الجداول المثلثية وفى حل المثلثات

فى كيفية وضع الجداول المثلثية

(٤٩)

لاجل ان يكون هناك كبير فائدة فى ابدال الزوايا والاقواس بالجيوب وجيوب التمام الخ يلزم متى عرف القوس ان تعلم الاعداد التى تبين هذه الارتباطات وبالعكس والطريقة المستحسنة فى بلوغ المطلوب ان تصنع جداول فيها الاعداد المذكورة موضوعة بجانب الاقواس المقابلة لها ولذا نشرع فى كيفية عمل حساب الجيوب وجيوب التمام الخ لجميع الاقواس الثانوية من عقد الى آخر اى من ١٠″ الى ٢٠″ وهلم جرا من التقسيم القديم وبمقتضى هذه القاعدة تتسلسل الاقواس فى جداول كاليت ولا نتكلم على التقسيم الجديد ولو جرينا عليه لكانت الطريقة الاتية مطابقة له

فنبحث اولا عن جيب ١٠″ فتذكر ان النسبة بين المحيط وقطره

ط = الخ ٣٫١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣

فمتى فرض ان نق هو الواحد كان نصف محيط الدائرة يساوى ط وحيث كان يوجد فى ١٨٠° مقدار ٦٤٨٠٠٠″ ثانية يوجد اجزاء من نصف القطر هكذا

$$\text{قوس } ١٠″ = \frac{\text{ط}}{٦٤٨٠٠} = \text{الخ } ٠٫٠٠٠٠٤٨٤٨١٣٦٨١١٠ \quad (١)$$

وحيث كان القوس الصغير جدا مساويا لجيبه تقريبا امكن ان يعتبر العدد المذكور مقدارا تقريبيا لجيب ١٠″ وهذا كلام صعب يحتاج لتوضيح

ولنوضحه

ولنوضحه فنقول

(٥٠)

نبرهن اولاً على ان احد الاقواس في الربع الاول من المحيط اكبر من جيبه واصغر من ظله فنفرض كما في شكل (١٢) ان اب جيب قوس اـ وخط اتـ ظل ذلك القوس فاذا دور الشكل حتى ان نقطة ا جاءت في ث يحدث قوس اث > وتر اث وحينئذ فقوس اـ > اب فيكون القوس اكبر من الجيب

ويحدث ايضا قوس اث < اتـ + ثتـ فيكون اـ < اتـ اى ان القوس اقل من الظل

وينتج من ذلك انه اذا كان $\frac{ظا ح}{جا ح}$ قريبا جدا من الواحد فالنسبة $\frac{ح}{جا ح}$ اكثر قربا للواحد منه

(٥١)

وثانيا على انه اذا تناقص احد الاقواس على التوالى الى ان صار صفرا فالنسبة الواقعة بين ذلك القوس وجيبه يمكن ان تقرب جدا من الواحد كما يراد بحيث يكون مآلها الى الواحد

ثم ان القانون ظا ح $= \frac{جا ح}{جتـ ح}$ السابق في بند (٢٨) ينتج

$\frac{ظا ح}{جا ح} = \frac{١}{جتـ ح}$ وحيث كان قوس ح يتناقص على التوالى (بفرض انه < ٩٠ فجيب تمامه يزداد ايضا على التوالى حين يقرب من الواحد كما يراد فحينئذ النسبة $\frac{١}{جتـ ح}$ او مساويها $\frac{ظا ح}{جا ح}$ تتناقص ايضا وتؤل الى الواحد

وحيث كان القوس اكبر من جيبه واقل من ظله فالنسبة $\frac{ح}{جا ح}$ لا يتأتى ان تكون < ا ولا > $\frac{ظا ح}{جا ح}$ فحينئذ يقال حيث ان النسبة الاخيرة يمكن

ان تقرب من الواحد كما يراد تكون النسبة الاولى كذلك وبهذا يثبت المطلوب
وهذا هو الداعى لاخذ مقدار قوس ١٠″ لمقدار جيب ١٠″

(٥٢)

ولنبحث الآن عن تعيين درجة التقريب لاجل ترك الخانات الاعشارية غير اللازمة فيكون معنا

جا ح = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ ح جت $\frac{١}{٢}$ ح

وحيث ان المتغايرة ظا $\frac{١}{٢}$ ح > $\frac{١}{٢}$ ح المكافئة الى $\frac{\text{جا } \frac{١}{٢} \text{ح}}{\text{جت } \frac{١}{٢} \text{ح}}$ > $\frac{١}{٢}$ ح

يحدث منها ٢ جا $\frac{١}{٢}$ ح > ح جت $\frac{١}{٢}$ ح ينتج

جا ح > ح جت^{٢} $\frac{١}{٢}$ ح

ولكن حيث ان جت^{٢} $\frac{١}{٢}$ ح = ١ − جا^{٢} $\frac{١}{٢}$ ح ومن ذلك يحدث بالضرورة

جت^{٢} $\frac{١}{٢}$ ح > ١ − $(\frac{١}{٢}\text{ح})^{٢}$ ينتج

جا ح > ح − $\frac{\text{ح}^{٣}}{٤}$

ولنطبق هذه النتيجة على قوس ١٠″ وبمقتضى مقدار (١) اذا زيد على الخانة الخامسة الاعشارية واحد يحدث قوس ١٠″ > ٠,٠٠٠٠٥ فينتج ان

$\frac{١}{٤}$(قوس ١٠″)^{٣} < ٠,٠٠٠٠٠ ٠٠٠٠٠ ٠٠٠٣٢

فيؤول الى جا ١٠″ > { ٠,٠٠٠٠٤ ٨٤٨١٣ ٦٨١١ الخ
− ٠,٠٠٠٠٠ ٠٠٠٠٠ ٠٠٠٣٢ }

فحينئذ يكون جا ١٠″ > ٠,٠٠٠٠٤ ٨٤٨١٣ ٦٨٠٧٨

فيشاهد ان هذا الجيب لا يأخذ فى الاختلاف عن قوس ١٠″ الا من ابتداء الخانة الثالثة عشر الاعشارية بل هذه الخانة لا تزيد الا واحدا ومن ذلك يستنتج انه اذا اثبت ان جا ١٠″ = ٠,٠٠٠٠٤ ٨٤٨١٣ ٦٨١
يتحقق ان الخطا اقل من الواحد من الرتبة الثالثة عشر وذلك لان من المعلوم ان المقدار السابق يقل اذا طرح واحد من خانته الاخيرة ويكبر اذا ضم واحد الى

هذه الخسانة لانه حينئذ يزيد عن القوس

وبوضع مقدار جا ١٠″ تحت هذا الجذر $\sqrt{١-جا^٢ ١٠}$ يوجد مقدار جت ١٠″ اعنى

جت ١٠″ = ٠,٩٩٩٩٩ ٩٩٩٨٨ ٢٤٨

وبعد ذلك يمكن ايجاد مقدار جيوب وجيوب تمام قوس ٢٠″ و ٣٠″ و ٤٠″ الى ٤٥″ بواسطة القوانين المعلومة التى هى

جا (ح+ى) = جا ح جت ى + جت ح جا ى

جت (ح+ى) = جت ح جت ى ــ جا ح جا ى

(٥٣)

قد اخذنا من المعلم توماسنسون احد مهندسى الانجليز طريقة اخترعها يسهل بها عمل الحسابات مع سرعة ولنذكرها فنقول

قوانين نمرة (٣٨) يحدث منها

جا (ح+ى) = ٢ جت ى جا ح ــ جا (ح ــ ى)

جت (ح+ى) = ٢ جت ى جا ح ــ جت (ح ــ ى)

فيمكن اعتبار الاقواس الثلاثة ح ــ ى و ح و ح+ى ثلاثة حدود متتابعة لمتوالية عددية فاضلها ى فاذا رمزنا الى هذه الحدود الثلاثة بحرف ع و عَ و عً يحدث

جا عً = ٢ جت ى جا عَ ــ جا ع

جت عً = ٢ جت ى جت عَ ــ جت ع

وبالقانون الاول يتبين انه متى علم جيبان متواليان يوجد الجيب التالى لهما بضرب الاخير فى ٢ جت ى وضرب الذى قبله فى ــ ١ ثم جمع الحاصلين وهذه القاعدة تجرى ايضا فى ايجاد جيب التمام

فبناء على ذلك اذا اردنا ايجاد الجيوب وجيوب التمام للاقواس من عقد الى آخر كمن ١٠″ الى ٢٠″ وهكذا نجعل ى = ١٠″ وبالرمز الى مقدارى جا ١٠″ و جت ١٠″ بحرفى هـ و يحدث معنا

جا ٠ = ٠
جا ٠ اً = هـ
جا ٠ ٢ً = ٢ و جا ٠ اً
جا ٠ ٣ً = ٢ و جا ٠ ٢ً ـ جا ٠ اً
جا ٠ ٤ً = ٢ و جا ٠ ٣ً ـ جا ٠ ٢ً الخ

جت ٠ = ا
جت ٠ اً = و
جت ٠ ٢ً = ٢ و جت ٠ اً ـ ا
جت ٠ ٣ً = ٢ و جت ٠ ٢ً ـ جت ٠ اً
جت ٠ ٤ً = ٢ و جت ٠ ٣ً ـ جت ٠ ٢ً الخ

وحيث لم يكن بين ٢و واثنين من الاحاد الا قليل اختلاف يمكن اختصار هذه
الحسابات وذلك بان يرمز بحرف ك الى فاضل ٢ ـ ٢و فيحدث
ك = ٠٫٠٠٠٠٠٠٠٢٣٥٠٤ ومن ذلك يحدث ٢و = ٢ ـ ك
فحينئذ مقدار جاعً يصير هكذا
جاعً = ٢ جاعَ ـ ك جاعَ ـ جاع ومن ذلك يستخرج
جاعً ـ جاعَ = (جاعَ ـ جاع) ـ ك جاعَ
وحين يعرف فاضل جاعً ـ جاعَ يضم ذلك الفاضل الى جاعَ فيعرف
جاعً وحيث كان هذا الفاضل بمقتضى القانون الاخير مساويا الفاضل
جاعَ ـ جاع المعلوم قبل الوصول الى قوس عً ـ حاصل ك × جاعَ تكون
حينئذ العملية الشاقة التي يلزم ان تجدد في كل جيب هي ضرب الجيب الاخير
في العدد الثابت ك = ٠٫٠٠٠٠٠٠٠٢٣٥٠٤
على ان هذه العملية يمكن اختصارها بان يعمل قبل كل شئ حواصل ضرب
٢٣٥٠٤ في خانات ١ و ٢ و ٣ الى ٩ وبهذه الطريقة يتوصل
بدون واسطة الى الحواصل الجزئية المتركب منها كل حاصل مثل ك جاعَ
ولا يبقى علينا الا جمعها وبمثل هذه الحسابات تقريبا يتوصل الى معرفة
جيوب التمام
ولما كان يمكن في مثل هذه الجملة العديدة من الاعمال ان يقع غلط عظيم يفهم
ان من المستحيل حفظ ثلاث عشرة خانة اعشارية مع الضبط الى ان تتم
العملية ولتعيين درجة الضبط التي يعتمد عليها يبحث فيما يأتي في نمرة (٥٦)
عن ايجاد مقادير جملة جيوب وجيوب تمام بواسطة عمليات يحدث عنها

تقريب مضبوط وحينئذ فعدد الخانات الاعشارية التى تكون مشتركة بين هذه المقادير وبين المقادير الناشئة من الحسابات التى وضحناها يدل تحقيقا على عدد الخانات الاعشارية التى تعتبر مضبوطة فى النتايج المتوسطة فاذا وجد بعد الحسابات ان التقريب غير كاف ينتخب قوس اقل من ١٠ً ويجعل مبدء كقوس ١ً مثلا ثم يبدء فى جميع الحسابات

(٥٤)

والعادة ان استعمال الاعداد المثلثية فى العمليات اقل نفعا من استعمال لوغاريتماتها ولذلك كانت هذه اللوغاريتمات تستنتج من الجداول بدون واسطة لكن بابقاء فرض نق = ١ تصير الجيوب وجيوب التمام كسورا وبالضرورة تصير لوغاريتماتها سالبة ولاجل ان تجعل موجبة يجب ان يفرض نق = ١٠^١٠ وهذا يرجع الى تقسيم نق الى عشر بلايين ذات اجزاء متساوية وحينئذ لا يمكن ان يكون لوغاريتم الجيب او جيب التمام سالبا الا اذا كان لزاوية لا تختلف عن صفر او ٩٠° الا قليلا بحيث يمكن اهمال الفرق بينهما ويسهل نقل نتايج الفرض الاول للفرض الثانى بان يضرب اس ١٠ فى لوغاريتماتها وتجمع ١٠ اليها وذلك لانه يوجد فى الفرض الاول الذى فيه نق = ١ نسب الجيوب وجيوب التمام الى نصف القطر ومن البين انه اذا قسم نصف القطر الى م اجزاء متساوية لزم ضرب م فى جميع هذه النسب حتى يعرف عدد الاجزاء المحصورة فى الجيوب وجيوب التمام

(٥٥)

لوغاريتمات الظلال تقدر بقانون

$$\text{ظاح} = \frac{\text{نق جاح}}{\text{جتح}}$$ الذى يؤول الى

لوظاح = لوجاح + (١٠ ـ لوجتح)

بمعنى انه يلزم ان يضاف الى لوغاريتم الجيوب التمام العددى للوغاريتم جيوب التمام

وبعد ذلك يمكن ايجاد لوغاريتمات ظلال التمام بواسطة ارتباط
ظا ح ظت ح = نق² الذى منه يستنتج

ظت ح = ١٠ + (١٠ — لوظا ح)

ومن الجداول مالا يوجد فيه ظلال التمام ويشاهد انه يسهل الحاقهما بها ويكفى فى ذلك ان تضاف ١٠ الى التمام العددى للوغاريتم الظل

اما القواطع وقواطع التمام فليس لها بالجداول تعلق مانظر الى ان لوغاريتماتها يمكن ايجادها بدون مشقة بواسطة لوغاريتمات الجيوب وجيوب التمام على ان استعمال هذين الخطين قليل جدا

واعلم ان الجداول لاتتعدى ٤٥° وبعد هذا العدد توجد الجيوب والظلال بواسطة جيوب التمام وظلال التمام وبالعكس فمثلا اذا كان ح > ٤٥° يحدث

جا ح = جت (٩٠° — ح) مع ان وضع الجداول المثلثية لايحوج الى حساب هذا التمام

فى حساب الجيوب وجيوب التمام من ٩ الى ١٨ ومن ١٨ الى ٢٧ بزيادة تسعة وهكذا لتحقيق الجداول

---

(٥٦)

لاجل تحقيق الجداول التى تكلمنا عليها فى آخر بند (٥٣) نتكلم على حساب ايجاد الجيوب وجيوب التمام لاقواس من ٩ الى ١٨ وهكذا فنقول

نفرض اولا ان جا ١٨ = س فيكون ٢ س وتر ٣٦ اى ضلع ذى العشرة اضلاع المنتظم المرسوم داخل الدائرة وحيث كان هذا الضلع مساويا للاكبر جزء من نصف القطر المقسوم الى جزئين اكبرهما وسط متناسب بين الخط الكلى والجزء الاصغر نفرض ان نصف القطر = ١ فيكون

١ : ٢ س :: ٢ س : ١ — ٢ س

ومن ذلك ينتج ان $\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢}\text{س} = \frac{١}{٤}$

فاذا حللنا هذه المعادلة وحذفنا منها المقدار السالب لمجهول س الذى لاطايل تحته حدث

$$\text{س} = \text{جا } ١٨^\circ = \text{جت } ٧٢^\circ = \frac{١}{٤}(-١+\sqrt{٥})$$

وبواسطة هذا المقدار يوجد بالسهولة

$$\sqrt{١-\text{س}^{٢}} = \text{جت } ١٨^\circ = \text{جا } ٧٢^\circ = \frac{١}{٤}\left(\sqrt{١٠+٢\sqrt{٥}}\right)$$

وبوضع مقادير جا ١٨° و جت ١٨° بدل جاح و جتح فى القوانين الدالة على جا٢ح و جتح كما فى بند (٢٩) يحدث

$$\text{جا } ٣٦^\circ = \text{جت } ٥٤^\circ = \frac{١}{٤}\left(\sqrt{١٠-٢\sqrt{٥}}\right)$$

$$\text{جت } ٣٦^\circ = \text{جا } ٥٤^\circ = \frac{١}{٤}\left(١+\sqrt{٥}\right)$$

وبوضع مقدار جا ١٨° فى القوانين التى تفيد مقادير جا $\frac{١}{٢}$ح و جت $\frac{١}{٢}$ح باعتبار جاح معلوما كما فى بند (٣٢) يحدث

$$\text{جا } ٩^\circ = \text{جت } ٨١^\circ = \frac{١}{٤}\sqrt{٣+\sqrt{٥}} - \frac{١}{٤}\sqrt{٥-\sqrt{٥}}$$

$$\text{جت } ٩^\circ = \text{جا } ٨١^\circ = \frac{١}{٤}\sqrt{٣+\sqrt{٥}} + \frac{١}{٤}\sqrt{٥-\sqrt{٥}}$$

واذا ابدلنا فى هذه القوانين نفسها جاح بمقدار

$$\text{جا } ٥٤^\circ = \frac{١}{٤}\left(١+\sqrt{٥}\right) \text{ ينتج}$$

$$\text{جا } ٢٧ = \text{جت } ٦٣ = \frac{١}{٤}\sqrt{٥+\sqrt{٥}} - \frac{١}{٤}\sqrt{٣-\sqrt{٥}}$$

$$\text{جت } ٢٧ = \text{جا } ٦٣ = \frac{١}{٤}\sqrt{٥+\sqrt{٥}} + \frac{١}{٤}\sqrt{٣-\sqrt{٥}}$$

وبتذكرنا ايضا ما سبق فى بند (٨) من ان $\text{جا } ٤٥^\circ = \text{جت } ٤٥^\circ = \frac{١}{٢}\sqrt{٢}$

يمكننا ان نصنع هذا الجدول

$\text{جا}\ 0^\circ = \text{جت}\ 90^\circ = 0$

$\text{جا}\ 9^\circ = \text{جت}\ 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

$\text{جا}\ 18^\circ = \text{جت}\ 72^\circ = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)$

$\text{جا}\ 27^\circ = \text{جت}\ 63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$\text{جا}\ 36^\circ = \text{جت}\ 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$\text{جا}\ 45^\circ = \text{جت}\ 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\text{جا}\ 54^\circ = \text{جت}\ 36^\circ = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$

$\text{جا}\ 63^\circ = \text{جت}\ 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$\text{جا}\ 72^\circ = \text{جت}\ 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\text{جا}\ 81^\circ = \text{جت}\ 9^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

$\text{جا}\ 90^\circ = \text{جت}\ 0^\circ = 1$

ولما كانت هذه المقادير المختلفة سهلة جداولا تشتمل الا على الجذور التربيعية كان سهلا ايجاد مقاديرها باى اعداد اعشارية مضبوطة وهذه المقادير هى التى تساعد على تحقيق الحسابات المذكورة فى بند (٨٢) ويمكن التنازل بالتقسيم الى اقواس ٣٠″ ٤° والى ١٥′ ٢° ثم الترقى به الى مضاريب ١٥′ ٢° المتوالية فيحدث من ذلك تحقيقات جديدة وهنالك تحقيقات اخرى تحتاج الى مزيد تفصيل لا محل له هنا

كيفية وضع جداول كاليت واستعمالها

(٥٧)

احسن الجداول المبنية على التقسيم القديم جداول كاليت كما ان احسن المبنية على التقسيم الجديد جداول بورده ففى مؤلف كاليت ثلاث جداول حرية بالتمييز عما عداها الاول يشتمل على لوغاريتمات الاعداد الصحيحة من ١ الى ١٠٨٠٠٠ وقد وضحنا فى كتابنا فى الجبر كيفية وضع هذا الجدول وكيفية استعماله والثانى يشتمل على لوغاريتمات الجيوب والظلال وجيوب التمام لجميع الاقواس التى من دقيقة الى اثنين الى ثلاثة وهكذا بزيادة واحدة

واحدة على مقتضى التقسيم الجديد والثالث يشتمل على لوغاريتمات الجيوب وجيوب التمام والظلال وظلال التمام من ١٠ً الى ٢٠ً الى ٣٠ً بزيادة عشر ثوانى فعشر ثوانى وهكذا على مقتضى التقسيم القديم ولا نتكلم هنا الا على الجدول الاخير لان الحسابات الفلكية والالات جارية دائما على مقتضى التقسيم القديم فنقول

(٥٨)

يوجد فيه اولا لوغاريتمات الجيوب ولوغاريتمات الظلال التى تزيد ثانية فثانية الى خمس درجات وكذلك لوغاريتمات جيوب التمام ولوغاريتمات ظلال التمام للزوايا التى تكون اكبر من ٨٥° فيستعان بهذا الجزء الاخير اذا كانت الزوايا من هذا الحد فصاعدا وبعد ذلك تأتى لوغاريتمات الجيوب وجيوب التمام والظلال وظلال التمام من ١٠ً الى ٢٠ً وهكذا وهى موضوعة فى خانات ذلك الجدول معنونا عنها بجيب وجيب تمام وهكذا ومتى كان الظل وظل التمام اكبر من نصف القطر كان لوغاريتمهما اكبر من ١٠ً وقد حذفت العشرات من الجدول لكن لابد من وضعها فى الحسابات

ولو لم يلتفت الا الى الدرج التى فى اول كل صحيفة لظن ان الجداول لا تزيد عن ٤٥° لكن اذا انتبه الى ان الخانات المشار اليها من اعلى بجيب وجيب تمام الخ مشار اليها ايضا من اسفل بجيب وجيب تمام الخ يشاهد انه بمراجعة الدرجات والعناوين الكائنة فى اسفل كل صحيفة وكذلك الخانات المتنازلة الموضوعة على اليمين الكائنة فيها الدقائق والثوانى تعرف لوغاريتمات الجيوب وجيوب التمام من ٤٥° الى ٩٠° فعلى ماذكر يشاهد حالا

لوجا ٣٠ً ٣٢َ ٦° .... = ٩,٠٥٦٦٢١٨

لوظت ٢٠ً ٤٦َ ٨١° .... = ٩,١٦٠١٥٩٦

واذا اشتملت الزاوية المعلومة على ثوان وكسورها وجب الرجوع الى الفواضل وعمل حسابات كالحسابات التى ذكرناها فى لوغاريتمات الاعداد فان ذلك عين اعتبار فواضل لوغاريتمات الجيوب وجيوب التمام متناسبة مع فواضل

الاقواس وهذا التناسب وان لم يكن صحيحا يفيد تقريبا كافيا واي ملتفت الى ان هذه الفواضل مشتركة بين هذين الخطين وبين لوغاريتمات الظلال وظلال التمام ولنوضح ذلك بالامثلة فنقول

المثال الاول ان يكون المطلوب ايجاد لوجا ٣٧,٨″ ٣٢′ ٦°

لوجا ٣٠″ ٣٢′ ٦° (فاضله مع مابعده ١٨٣٦) = ٩,٠٥٦٦٢١٨
مقابل ٧″ .... = ١٢٨٥,٢
مقابل ٨,٠ .... = ٤٦,٨٨

لوجا ٣٧,٨″ ٣٢′ ٦° .... = ٩,٠٥٦٧٦٥٠

المثال الثاني ان يكون المطلوب لوجت ٢,٢″ ٢٧′ ٨٣°

لوجت ٣٠″ ٢٧′ ٨٣° (فاضله ١٨٣٦) ...= ٩,٠٥٦٦٢١٨
مقابل ـ٧″ .... = ١٢٨٥,٢
مقابل ـ٨,٠ .... = ١٤٦,٨٨

لوجت ٢,٢″ ٢٧′ ٨٣° .... = ٩,٠٥٦٧٦٥٠

المثال الثالث ان يكون المطلوب ايجاد لوظا ٥٢,٧٦″ ١٣′ ٨°

لوظا ٥٠″ ١٣′ ٨° (فاضله ١٤٨٦)... = ٩,١٦٠٣٠٨٣
مقابل ٢″ .... = ٢٩٧,٢
مقابل ٧,٠ .... = ١٠٤,٠٢
مقابل ٠٦,٠ .... = ٨,٩١٦

لوظا ٥٢,٧٦″ ١٣′ ٨° .... = ٩,١٦٠٣٤٩٣

الرابع ان يكون المطلوب ايجاد لوظت ٧,٢٤″ ٤٦′ ٨١°

لوظت ١٠″ ٤٦′ ٨١° (فاضله ١٤٨٦) = ٩,١٦٠٣٠٨٣
مقابل ـ٢ .... = ٢٩٧,٢
مقابل ـ٧,٠ .... = ١٠٤,٠٢
مقابل ـ٠٦,٠ .... = ٨,٩١٦

لوظت ٧,٢٤″ ٤٦′ ٨١° .... = ٩,١٦٠٣٤٩٣

ولنبحث الآن عن حل عكس المسئلة المتقدمة فنفرض ان المعلوم لوغاريتم جيب وجيب تمام الخ وان المطلوب تعيين الزاوية المقابلة لذلك اللوغاريتم فاذا فرضنا مثلا ان لوجاس = ٩،٠٥٦٧٦٥٠ فاقرب لوغاريتمات الجيوب الاقل من المذكور فى الجداول هو ٩،٠٥٦٦٢١٨ وهو يقابل ٣٠″ ٣٢′ ٦° وفاضل اللوغاريتم المعلوم عن اللوغاريتم الذى فى الجدول ١٤٣٢ والفاضل الجدولى المقابل لعدد ١٠″ هو ١٨٣٦ وحينئذ يقسم ١٤٣٢ على ١٨٣٦ وتجعل عشرات خارج القسمة ثوانى فبهذه الطريقة يوجد ٧،٨″ وحينئذ يكون القوس المطلوب س = ٣٧،٨″ ٣٢′ ٦° ولنذكر حسابات هذه المسئلة مع مسائل اخرى تشبهها فنقول

المسئلة الاولى ماهى الزاوية التى لوغاريتم جيبها ٩،٠٥٦٧٦٥٠

حلها

لوجاس = ٩،٠٥٦٧٦٥٠

مقابل ٩،٠٥٦٦٢١٨ (فاضله ١٨٣٦) = ٣٠″ ٣٢′ ٦°

الفاضل الاول الذى هو ١٤٣٢٠ .... = ٧″

الفاضل الثانى اى ١٤٦٨٠ .... = ٠،٨

فيكون س .... = ٣٧،٨″ ٣٢′ ٦°

المسئلة الثانية ماهى الزاوية التى لوغاريتم جيب تمامها = ٩،٠٥٦٧٦٥٠

حلها

لوجتس = ٩،٠٥٦٧٦٥٠

مقابل ٩،٠٥٦٨٠٥٤ (فاضله ١٨٣٦) = ٢٠″ ٢٧′ ٨٣

الفاضل الاول اى ٤٠٤٠ .... = ٢″

الفاضل الثانى اى ٣٦٨٠ .... = ٠،٢

فيكون س .... = ٢٢،٢″ ٢٧′ ٨٣

المسئلة الثالثة ماهى الزاوية التى لوغاريتم ظل تمامها = ٩٫١٦٠٣٤٩٣

حلها

لوظاس = ٩٫١٦٠٣٤٩٣
مقابل ٩٫١٦٠٣٠٨٣ (فاضله ١٤٨٦) ٠٠٠٠ = ٨° ١٣′ ٥٠″
الفاضل الاول اى ٠٠٤١٠ ٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٢
الفاضل الثانى اى ٠٠١١٢٨٠ ٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٠٫٧
الفاضل الثالث اى ٠٠٠٨٧٨٠ ٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٠٫٠٦
فيكون س ٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٨° ١٣′ ٥٢٫٧٦″

المسئلة الرابعة ماهى الزاوية التى لوغاريتم ظل تمامها = ٩٫١٦٠٣٤٩٣

حلها

لوظت س = ٩٫١٦٠٣٤٩٣
مقابل ٩٫١٦٠٤٥٦٩ (فاضله ١٤٨٦) ٠٠ = ٨١° ٤٦′ ٠″
الفاضل الاول اى ١٠٧٦٠ ٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٧
الفاضل الثانى اى ٠٣٥٨٠ ٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٠٫٢
الفاضل الثالث اى ٠٦٠٨٠ ٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٠٫٠٤
فيكون س ٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٨١° ٤٦′ ٧٫٢٤″

(٦١)

القوانين المشتملة على جيوب وجيوب تمام وغيرها تستلزم ان يكون نصف القطر واحدها ولتطبيق الجداول عليها طريقتان

الاولى ان يجعل نصف القطر نق فى القوانين كما وقع فى بند (١٩) ثم تستعمل اللوغاريتمات كما هى فى الجداول بجعل لونق = ١٠ والثانية ان لا يغير فى القانون شئ اعنى ان يبقى فرض نق = ١ على ماهو عليه غاية مافيه يطرح من كل لوغاريتم متخذ من الجداول المثلثية عدد ١٠ والاحسن ان تكون هذه العملية جارية على العدد الصحيح من اللوغاريتم الذى يمكن ان يصير سالبا واحسن من ذلك ان تستعمل اللوغاريتمات كما هى فى الجداول ولا يلتفت

لهذه العشرات الا في آخر العمل ومثل هذا التصحيح يستعمل عادة دائما الا انه ليس على الانسان في الحسابات الاجمع الاعداد اللوغارتمية وطرحها ومن الواضح ان كل لوغاريتم جمعي مأخوذ من الجدول المثاني ينشأ عنه عشرة تزيد في كل حاصل وكل لوغاريتم طرحي ينشأ عنه نقص عشرة

ولاجل الاختصار يجب دائما ابدال طرح اللوغاريتم بجمع تمامه العددي وحينئذ فالعشرة التي يجب طرحها من ذلك اللوغاريتم اتحويله الى فرض لو=١ تكون مجبورة بالعشرة المضافة باخذ التمام العددي وبالجملة فغلط عشرة في لوغاريتم عظيم لا يخفى على احد ولمنع ذلك الغلط نسوق مسألتين فنقول

الاولى اذا فرضنا س=٤١٩×جا٢ ٤٠° يكون

لوس=لو ٤١٩ +٢ لوجا٤٠° وباخذ لوجا٤٠° من الجدول يكون لوس مشتملا على عشرتين زائدتين يلزم طرحهما من الحاصل هكذا

لو ٤١٩ .... = ٢,٦٢٢٢١٤٠

٢لوجا ٤٠° .... = ١٩,٦١٦١٣٥٠

لوس .... = ٢,٢٣٨٣٤٩٠

فاذا اريد ايجاد س بشرط ان يكون الغلط اقل من $\frac{١}{١٠٠}$ يضاف ٢ على العدد الصحيح فيوجد

س = ١٧٣,١٢

الثانية ان يفرض ان جاس= $\frac{٣١٤\times جا٣٠°}{٤١١\times جت^٢ ١٥°}$ فيكون

لوجاس=لو ٣١٤ – لو٤١١ +لوجا٣٠° – ٢لوجت١٥°

واذا اجريت العملية باخذ التمامات فالعشرتان اللتان يلزم طرحهما من ٢ لوجت ١٥° تجبران بالعشرتين اللتين يلزم اضافتهما باخذ التمام ثم ان لوجا٣٠° وتمام لو٤١١ ينشأ عنهما عشرتان زائدتان ولكن حيث كان يلزم ايجاد زاوية س بواسطة الجداول لا يطرح من الحاصل الا عشرة

واحدة كما هو مبين فيما نذكره رامزين الى التمام العددى للوغار تمات بكلمة
لوَفنقول

لو ٣١٤ .... = ٥ ٢،٤٩٦٩٢٩٦
لوَ ٤١١ .... = ٨ ٧،٣٨٦١٥٨١
لو جا ٣٠° .... = ٩،٦٩٨٩٧٠٠
٢ لوَجت ١٥° .... = ٠،٠٣٠١١٢٤
فيكون لوجاس .... = ٩،٦١٢١٧٠٢

وهذا اللوغار يتم مرتب فى الجداول بسهولة كما ينبغى فانه يشاهد هناك
س = ٧َ ١٠َ ٢٤°

في النسبة التى بين اضلاع مثلث
مستقيم الاضلاع وزواياه

(٦٢)

للاختصار نشير فيما يأتى الى زوايا المثلثات بحروف ح و ء و هـ الموضوعة فى رأوسها وللاضلاع المقابلة لتلك الزوايا بحروف حَ و ءَ و هَ وزيادة على ذلك اذا كان المثلث قائم الزاوية توضع ح فى رأس الزاوية القائمة ويرمز للضلع المقابل لها اى الوتر بحرف حَ اذا تقرر هذا نبرهن على القواعد المعتمد عليها فى حل المثلثات المستقيمة الاضلاع فنقول

(٦٣)

الدعوى الاولى النظرية

كل ضلع مجاور للزاوية القائمة فى اى مثلث قائم الزاوية يساوى الوتر مضروبا فى جيب الزاوية المقابلة لذلك الضلع

ولنفرض كما فى شكل (١٣) ان مثلث ح ء هـ قائم الزاوية فى نقطة ح ومن نقطة ء المتخذة مركزا يرسم قوس ور بنصف قطر ما وينزل عمود وح فجيب زاوية ء هو النسبة بين وح وبين نصف قطر وء كما سبق فى بند (١٨) وحيث ان مثلثى ح ء هـ و ء وح متشابهان يوجد فيهما

حهـ
ءهـ

$\frac{حه}{ده} = \frac{وح}{ود}$ فيكون $\frac{دَ}{حَ} =$ جاد او $دَ = حَ$ جاد (١)

وبهذا يثبت المطلوب

وحيث ان زاوية د تمام زاوية ه يكون جاد = جت. ه ومن هذا يمكن ان يستنتج ان كل ضلع مجاور للزاوية القائمة يساوى الوتر مضروبا فى تمام جيب الزاوية المجاورة لذلك الضلع

(٦٤)

الدعوى الثانية النظرية

كل ضلع من الاضلاع المجاورة للزاوية القائمة فى اى مثلث قائم الزاوية مساو للضلع الاخر مضروبا فى ظل الزاوية المقابلة لذلك الضلع

ولنفرض ايضا مثلث حده كما فى شكل (١٣) فبعد ان نرسم قوس ور نقيم رت عمودا على حد فالنسبة بين رت و در هى ظل زاوية د كما فى بند (١٨) وحيث ان $\frac{حه}{حد} = \frac{رت}{رد}$ يكون

$\frac{دَ}{هَ} =$ ظاد او $دَ = هَ \times$ ظاد (٢)

وهذا الحاصل يمكن ان يستنتج من الدعوى الاولى لانه اذا طبقت هذه الدعوى على كل من الضلعين دَ و هَ ولوحظ ان جا ه = جت د يحدث

$دَ = حَ$ جاد و $هَ = حَ$ جت د فيكون

$\frac{دَ}{هَ} = \frac{جاد}{جت د} =$ ظاد او $دَ = هَ$ ظاد

الدعوى الثالثة النظرية

نسبة جيوب الزوايا الى بعضها فى اى مثلث مستقيم الاضلاع كنسبة الاضلاع المقابلة لها

ولنفرض ان ح و ء زاويتان حيث ما اتفق من مثلث حءه كما فى شكل (١٤) وننزل من رأس زاوية ه العمود هو على الضلع المقابل لهما حء فاذا وقع العمود داخل مثلث حءه فالمثلثان القائما الزاوية حهو و ءهو يحدث عنهما هو= ءَ جاح و هو =حَ جاء فحينئذ يكون ءَ جاح = حَ جاء او جاح : جاء :: حَ : ءَ واذا وقع ذلك العمود على استقامة ءح كما فى شكل (١٥) فمثلث حهو يحدث منه هو= ءَ جاهحو لكن حيث كانت زاوية حهو متممة لزاوية هحء يحدث كما فى بند (٩)

جاهحو= جاهحء= جاح

ومن ذلك يحدث ايضا

جاح : جاء : : حَ : ءَ (٣)

(٦٦)

الدعوى الرابعة النظرية

مربع احد الاضلاع فى اى مثلث مستقيم الاضلاع يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين ناقصا ضعف حاصل ضرب مستطيل هذين الضلعين فى تمام جيب الزاوية المنحصرة بين هذين الضلعين اعنى

حَ٢ = ءَ٢ + هَ٢ ــ ٢ ءَ هَ جتح (٤)

ولنفرض ان حءه كما فى شكل (١٤) المثلث المذكور ثم ننزل عمود هو على حء فاذا كانت زاوية ح حادة حدث بمقتضى دعوى معلومة ان

هء٢ = حه٢ + حء٢ ــ ٢ حء×حو او

حَ٢ = ءَ٢ + هَ٢ ــ ٢ هَ×حو

وحيث ان المثلث القائم الزاوية حهو يحدث عنه حو = ءَ جتح كما فى بند (٦٣) توجد بوضع مقدار ضلع حو بدله معادلة (٤) واما اذا كانت زاوية ح منفرجة كما فى شكل (١٥) فيحدث

حَ٢ = ءَ٢ + هَ٢ + ٢ هَ×حو

والمثلث القائم الزاوية حهو يحدث عنه $\text{حو} = \text{ءَ}\ \text{جت}\ \text{هحو}$
لكن زاوية هحو متممة لزاوية هحء او ح فيحدث
$\text{جت}\ \text{هحو} = -\ \text{جت}\ \text{ح}$ كما سبق في بند (٩) فحينئذ يكون
$\text{حو} = -\ \text{ءَ}\ \text{جت}\ \text{ح}$ وبوضع هذا المقدار في مقدار حَ^2 توجد معادلة (٤)

(٦٧)

النظرية السابقة تكفي وحدها في حل المثلثات المستقيمة الاضلاع لما هو ظاهر من ان هذه الدعوى اذا اجريت بالتوالي على الاضلاع الثلاثة توجد هذه المعادلات الثلاث

$$\text{حَ}^2 = \text{ءَ}^2 + \text{هَ}^2 - 2\,\text{ءَ}\,\text{هَ}\ \text{جت}\ \text{ح}$$
$$\text{ءَ}^2 = \text{حَ}^2 + \text{هَ}^2 - 2\,\text{حَ}\,\text{هَ}\ \text{جت}\ \text{ء}$$
$$\text{هَ}^2 = \text{حَ}^2 + \text{ءَ}^2 - 2\,\text{ءَ}\,\text{حَ}\ \text{جت}\ \text{ه}$$

وبواسطة هذه المعادلات الثلاث يمكن تعيين ثلاثة من اجزاء المثلث الستة اذا كانت الثلاثة الاخرى معلومة (الا في الحالة التي لا يمكن فيها حل المثلث وذلك اذا علمت الزوايا الثلاث فقط)

(٦٨)

حيث ان النظرية الثالثة تدل على النسبة بين ضلعين وزاويتين مقابلتين لهما يجب ان تكون ناتجة عن هذه المعادلات الثلاث ولنذكر كيفية استنتاجها منها فنقول

المعادلة الاولى يحدث منها $\text{جت}\ \text{ح} = \dfrac{\text{ءَ}^2 + \text{هَ}^2 - \text{حَ}^2}{2\,\text{هَ}\,\text{ءَ}}$ فيكون

$$\text{جا}^2\ \text{ح} = 1 - \text{جت}^2\ \text{ح} = \frac{4\,\text{ءَ}^2\,\text{هَ}^2 - \left(\text{ءَ}^2 + \text{هَ}^2 - \text{حَ}^2\right)^2}{4\,\text{ءَ}^2\,\text{هَ}^2}$$

$$= \frac{2\,\text{حَ}^2\text{ءَ}^2 + 2\,\text{حَ}^2\text{هَ}^2 + 2\,\text{ءَ}^2\text{هَ}^2 - \text{حَ}^4 - \text{ءَ}^4 - \text{هَ}^4}{4\,\text{ءَ}^2\,\text{هَ}^2}$$ فبالضرورة يحدث

$$\frac{\text{جا}\ \text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\sqrt{2\,\text{حَ}^2\text{ءَ}^2 + 2\,\text{حَ}^2\text{هَ}^2 + 2\,\text{ءَ}^2\text{هَ}^2 - \text{حَ}^4 - \text{ءَ}^4 - \text{هَ}^4}}{2\,\text{حَ}\,\text{ءَ}\,\text{هَ}}\ .$$

والمعادلتان الاخريان يحدث منهما بطريقة كالسابقة نسبتى $\frac{جا ى}{ى}$ و $\frac{جا هـ}{هَ}$

لكن هاتان النسبتان يمكن ايجادهما بطريقة اسهل من المذكورة بان يغير في الطرف الثانى من المعادلة السابقة حَ بحرف ىَ و ىَ بحرف حَ ثم حَ بحرف هَ و هَ بحرف حَ وحيث ان الطرف الثانى دائما دالة متماثلة لحروف حَ و ىَ و هَ اعنى انها باقية على حالها وان غيرت فيه الحروف اى تغيير يحدث لنا بمقتضى ما فى النظرية الثالثة

$$\frac{جا ح}{حَ} = \frac{جا ى}{ىَ} = \frac{جا هـ}{هَ}$$

حل المثلثات المستقيمة

الاضلاع القوائم لزاوية

(٦٩)

الحالة الاولى

اذا فرضنا ان وتر حَ وزاوية ى الحادة معلومان والمطلوب ايجاد زاوية هـ وضلعا ىَ و هَ

قلنا معنا هـ = ٩٠° ــ ى فيستخرج ىَ و هَ بواسطة النظرية الاولى التى يحدث منها

ىَ = حَ جا ى و هَ = حَ جتى

ويجب الالتفات الى ان الحسابات تعمل بواسطة اللوغاريتمات

(٧٠)

الحالة الثانية

اذا فرضنا ان ضلع ىَ المجاور للزاوية والزاوية الحادة ى معلومان والمطلوب ايجاد زاوية هـ والضلعان حَ و هَ

قلنا ايضا ان هـ = ٩٠° ــ ى ويستنتج من النظرية الاولى مقدار حَ بواسطة ارتباط

$ى = ح$ جاد الذى يؤخذ منه $ح = \frac{ى}{جاد}$

ويستنتج ايضا من الدعوى الثانية النظرية مقدار $هـ$ بواسطة معادلة

$هـ = ى$ ظاهـ او $هـ = ى$ ظتد

(٧١)

الحالة الثالثة

اذا فرضنا ان وتر $ح$ وضلع $ى$ معلومان والمطلوب ايجاد ضلع $هـ$ وزاويتا د و هـ

قلنا بواسطة خاصية المثلث القائم الزاوية نجد $هـ^٢ = ح^٢ - ى^٢$ التى منها يستخرج $هـ = \sqrt{(ح + ى)(ح - ى)}$

وهذا المقدار يسهل حسابه بواسطة اللوغاريتمات

ويمكن ايجاد د بواسطة معادلة $ى = ح$ جاد السابقة فى بند (٦٣) ومن ذلك يؤخذ جاد $= \frac{ى}{ح}$

وبالجملة ينتج هـ $= ٩٠° -$ د

واذا ابتدء بايجاد الزوايا امكن ايجاد ضلع $هـ$ بواسطة معادلة

$هـ = ح$ جاهـ

(٧٢)

الحالة الرابعة

اذا كان ضلعا $ى$ و $هـ$ المجاوران للزاوية القائمة معلومين والمطلوب ايجاد الوتر $ح$ والزاويتان د و هـ

قلنا نحسب اولا زاوية د بواسطة معادلة $ى = هـ$ ظاد كما فى النظرية الثانية ومعلوم ان هـ $= ٩٠° -$ د فوتر $ح$ يوجد بواسطة معادلة

$ى = ح$ جاد كما فى الدعوى الاولى النظرية

ويمكن ايجاد $ح$ بواسطة قانون $ح = \sqrt{ى^٢ + هـ^٢}$

لكن حيث ان كمية $ب^2 + هـ^2$ لا تنحل الى مضروبين تكون صعبة الحسابات اللوغاريتمية فالاحسن ان تعين زاوية د اولا ثم يستفاد بها على ايجاد ح

في حل المثلثات المستقيمة الاضلاع ايا ما كانت

(٧٣)

الحالة الاولى

اذا كان ضلع ح وزاويتان من مثلث معلومة والمطلوب ايجاد الاجزاء الاخرى

قلنا اذا طرح مجموع الزاويتين المعلومتين من ١٨٠° تعرف الزاوية الثالثة ثم يشرع في ايجاد الضلعين المجهولين ب و هـ بواسطة النظرية الثالثة بوضع هاتين المتناسبتين

جاح : جاد :: ح : ب و جاح : جاهـ :: ح : هـ

(٧٤)

الحالة الثانية

اذا فرضنا ان ضلعي ح و ب وزاوية ح المقابلة لاحدهما معلومة والمطلوب ايجاد الضلع الثالث هـ والزاويتان الاخريان د وهـ

قلنا الاسهل ان يبحث اولا عن زاوية د المقابلة لضلع ب بوضع هذه المتناسبة

ح : ب :: جاح : جاد

ومن حيث ان زاويتي ح و د معلومتان يكون

هـ = ١٨٠° −(ح+د)

فحينئذ يوجد ضلع هـ بوضع هذه المتناسبة

جاح : جاهـ :: ح : هـ

(٧٥)

ويلزم لحل هذا السؤال بعض توضيحات زائدة وهي ان نقول المتناسبة الاولى

تعين اولا جاد يعني جاد = $\frac{ب\ جاد}{ح}$

ومن الجدول يعرف ان زاوية د زاوية حادة لكن الجيب المذكور يقابل
ايضا الزاوية المتممة المنفرجة فحينئذ اذا كان م الزاوية الموجودة فى الجدول
يكون لزاوية د مقداران د=م و د=١٨٠°ـ م
وهذا كما يظهر يدل على مثلثين وينتج عنه تنبيهات
الاول اذا كانت زاوية حـ المعلومة منفرجة اوقائمة كما فى شكل (١٦)
فالزاويتان الاخريان تكونان حادتين فيلزم اخذ د=م ويلزم فرض حَ > ءَ
ليكون المثلث ممكنا وهذا الشرط كاف فى ذلك
الثانى اذا كانت زاوية حـ حادة و حَ > ءَ كما فى شكل (١٧) يلزم
ان يكون حـ > د ويلزم قطع النظر عن كون مقدار د= ١٨٠°ـ م
فلم يزل المثلث ممكنا
الثالث اذا كانت زاوية حـ حادة و حَ < ءَ يصح فرض د=م و
د= ١٨٠°ـ م على حد سوا كما فى شكل (١٨) لان الزاوية الحادة اما
دء=حـ او حـهـ = ءَ فالدائرة المرسومة من نقطة هـ المعتبرة مركزا
بنصف قطر حَ يمكن ان تقسم فى بعض الاحوال حـ د فى نقطتى
د و دً

وحينئذ يحدث معنا مثلثان حـهـد و حـهـدً مرسومان بواسطة المعاليم
وفيهما زاويتان حـدهـ و حـدًهـ متممان لبعضهما وشرط ايجاد حلين
ان يكون ضلع حَ المفروض < ءَ اكبر من عمود هـو النازل
على حـد واذا كان ضلع حَ مساويا هـو فالدائرة المرسومة من نقطة
هـ تكون مماسة لضلع حـد والحلان يرجعان لحل واحد لمثلث حـهـو
القائم الزاوية وغاية الامر انه اذا كان ضلع حَ اصغر من هـو لا يمكن حل
المثلث ولنبرهن على ان عدم الامكان فى هذه الحالة مبين بمقدار جاد
فنقول
المثلث القائم الزاوية حـهـو يحدث عنه هـو= ءَ جاحـ لكن حَ بالفرض

اقل من هو فيكون

$$ح < ء\,جا\,ح \quad \text{ومنه يؤخذ} \quad \frac{ء\,جا\,ح}{ح} > ١$$

فيكون مقدار جاء اكبر من ١ ومن المعلوم انه لا جيب اكبر من ١ فالمثلث يكون مستحيلا

(٧٦)

قد حكمنا بالبحث على ضلع هـ بعد معرفة زاوية ء ومع ذلك يمكن ايجاد هذا الضلع حالا بواسطة الاجزاء الثلاثة المعلومة التي هي ح و ء و ح لان الدعوى الرابعة النظرية تفيد

$$ح^{٢} = ء^{٢} + هـ^{٢} - ٢\,ء\,هـ\,جت\,ح \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$هـ^{٢} - ٢\,ء\,جت\,ح\,هـ = ح^{٢} - ء^{٢}$$

ومن هذه المعادلة التي بدرجة ثانية يستخرج

$$هـ = ء\,جت\,ح \pm \sqrt{ح^{٢} - ء^{٢} + ء^{٢}\,جت^{٢}\,ح} = ء\,جت\,ح \pm \sqrt{ح^{٢} - ء^{٢}\,جا^{٢}\,ح}$$

وحيث ان ضلع المثلث لابد وان يكون كمية حقيقية موجبة يلزم البحث على النسبة التي بين ح و ء و ح التي تحدث الضلع هـ مقدارا او مقدارين من هذا الجنس وقد رأينا انه لا ينبغي الاشتغال بالمباحثة في هذا المقام

وحيث ان مقادير ضلع هـ السابقة غير مريحة في الحسابات اللوغاريتمية لا تستعمل في حساب المثلثات ولما كان يوجد كثير من امثال هذه المقادير في حساب المثلثات لزمنا ان نبين الطريقة التي انتخبها الفلكيون لتسهيل استعمالها فنضع المقادير السابقة بهذه الكيفية

$$هـ = ء\,جت\,ح \pm ح\sqrt{١ - \frac{ء^{٢}\,جا^{٢}\,ح}{ح^{٢}}}$$

وحيث فرضت هذه المقادير حقيقية تكون كمية $\frac{ء\,جا\,ح}{ح}$ اصغر من ١ ويمكن اعتبار هذه الكمية جيبا لاحدى الزوايا كزاوية ع التي نعين بوضع

$$\text{جاع} = \frac{\text{دَ جاح}}{\text{حَ}} \quad \text{فحينئذ يحدث}$$

$$\text{دَ} = \frac{\text{حَ جاع}}{\text{جاح}} \quad \text{و} \quad \sqrt{1 - \frac{\text{دَ}^2 \text{جا}^2 \text{ح}}{\text{حَ}^2}} = \text{جتـ ع}$$

$$\text{فيكون هَ} = \text{حَ} \left(\frac{\text{جاع جتح} \pm \text{جاح جتع}}{\text{جاح}} \right) = \frac{\text{حَ جا(ع} \pm \text{ح)}}{\text{جاح}}$$

وهذه المقادير سهلة الحسابات بواسطة اللوغاريتمات

وبالجملة فهذا الحل داخل فى الحقيقة تحت الاول لان زاوية ع المساعدة هى عبارة عن زاوية د

الحالة الثالثة

(٧٧)

اذا كان ضلعا حَ و دَ والزاوية التى بينهما من مثلث معلومة والمطلوب ايجاد ضلع هَ وزاويتا ح و د

قلنا يعلم من الدعوى الثالثة النظرية ان

$$\text{حَ} : \text{دَ} :: \text{جاح} : \text{جاد}$$

وهذه المتناسبة تحتوى على مجهولى ح و د لكن يحدث منها

$$\text{حَ} + \text{دَ} : \text{حَ} - \text{دَ} :: \text{جاح} + \text{جاد} : \text{جاح} - \text{جاد}$$

ومن المعلوم ايضا كما فى بند (٤٠) ان

$$\text{جاح} + \text{جاد} : \text{جاح} - \text{جاد} :: \text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} + \text{د}) : \text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} - \text{د})$$

فينتج

$$\text{حَ} + \text{دَ} : \text{حَ} - \text{دَ} :: \text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} + \text{د}) : \text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح} - \text{د}) \quad (1)$$

وحيث كان

$$\tfrac{1}{2} (\text{ح} + \text{د}) = \tfrac{1}{2} (180^\circ - \text{هـ}) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\text{هـ}$$

تكون الثلاثة حدود الاول من المتناسبة السابقة معلومة ويمكن ان يبنى عليها معرفة مقدار $\tfrac{1}{2}$ (ح ـ د) ومتى علم نصف مجموع زاويتى ح و د ونصف

فاضلهما يعلم كل من الزاويتين لان من المعلوم بداهة انه يحدث

$$\text{ح} = \frac{\text{ح}+\text{ى}}{٢} + \frac{\text{ح}-\text{ى}}{٢} \quad \text{و} \quad \text{ى} = \frac{\text{ح}+\text{ى}}{٢} - \frac{\text{ح}-\text{ى}}{٢}$$

وحيث علم ح و ى يوجد هَ بوضع

$$\text{جاح} : \text{جاهـ} :: \text{حَ} : \text{هَ} \qquad (٢)$$

(٧٨)

وهذه المتناسبة تستلزم البحث عن ثلاثة لوغاريتمات جديدة هى حَ و جاى و جاهـ لكنها تنقص واحدا بطريقة انه حيث حدث

$\text{جاح} : \text{جاى} : \text{جاهـ} :: \text{حَ} : \text{ىَ} : \text{هَ}$ يلزم ان تحدث ايضا هذه المتناسبه

$\text{جاح} + \text{جاى} : \text{جاهـ} :: \text{حَ}+\text{ىَ} : \text{هَ}$ وينبنى على هذا ان

$$\text{هَ} = \frac{(\text{حَ}+\text{ىَ})\,\text{جاهـ}}{\text{جاح}+\text{جاى}}$$

وبواسطة القوانين المعلومة السابقة فى بندى (٣٩ و ٢٩) يعلم

$\text{جاح}+\text{جاى} = ٢\,\text{جا}\frac{١}{٢}(\text{ح}+\text{ى})\ \text{جت}\frac{١}{٢}(\text{ح}-\text{ى})$ و

$\text{جاهـ} = ٢\,\text{جا}\frac{١}{٢}\text{هـ}\ \text{جت}\frac{١}{٢}\text{هـ}$ وكذلك

$\text{جا}\frac{١}{٢}(\text{ح}+\text{ى}) = \text{جا}(٩٠^\circ - \frac{١}{٢}\text{هـ}) = \text{جت}\frac{١}{٢}\text{هـ}$ وبوضع هذه المقادير فى مقدار هَ والاختصار الكلى يحدث

$$\text{هَ} = \frac{(\text{حَ}+\text{ىَ})\,\text{جا}\frac{١}{٢}\text{هـ}}{\text{جت}\frac{١}{٢}(\text{ح}-\text{ى})} \qquad (٣)$$

وهذا القانون المشتمل على حَ + ىَ معلوم مما سبق فقد علم حقيقة انه نقص من اللوغاريتمات المبحوث عنها فى متناسبة (٢) واحد

(٧٩)

تعيين ضلع هَ لا يتأتى الا بعد تعيين زاويتى ح و ى ولاجل تعيينه بدون هذه الواسطة تستعمل الدعوى الرابعة النظرية التى يحدث منها

$$ه' = \sqrt{ح'^2 + ى'^2 - 2 ح' ى' جت ه}$$

وحيث ان اللوغاريتمات لا يمكن تطبيقها على هذا القانون يلزمنا ان نستعين بزاوية مساعدة ونختار الطريقة المشهورة من الطرق المجراة على هذا القانون فنقول من المعلوم ان

$$جت^2 \tfrac{1}{2} ه + جا^2 \tfrac{1}{2} ه = 1 \quad و \quad جت^2 \tfrac{1}{2} ه - جا^2 \tfrac{1}{2} ه = جت ه$$

كما في بند (٣١) وبالوضع يحدث

$$ه' = \sqrt{(ح'^2 + ى'^2)(جت^2 \tfrac{1}{2} ه + جا^2 \tfrac{1}{2} ه) - 2 ح' ى' (جت^2 \tfrac{1}{2} ه - جا^2 \tfrac{1}{2} ه)}$$

$$= \sqrt{(ح' + ى')^2 جا^2 \tfrac{1}{2} ه + (ح' - ى')^2 جت^2 \tfrac{1}{2} ه} = (ح' + ى') جا \tfrac{1}{2} ه \sqrt{1 + \frac{(ح' - ى')^2 ظت^2 \tfrac{1}{2} ه}{(ح' + ى')^2}}$$

وحيث ان الظل يمكن ان يتكيف بجميع كيفيات الكمية يفرض

$$ظا ع = \frac{(ح' - ى') ظت \tfrac{1}{2} ه}{ح' + ى'}$$

وحينئذ يصير الجذر الاخير

$$\sqrt{1 + ظا^2 ع} = \sqrt{1 + \frac{جا^2 ع}{جت^2 ع}} = \frac{1}{جت ع}$$

وينتج من ذلك $\quad ه' = \frac{(ح' + ى') جا \tfrac{1}{2} ه}{جت ع}$

وهكذا توجد بالتوالي الزاوية المساعدة ع وضلع ه' بواسطة قانونين يسهل حسابهما بواسطة الجداول

وهذا الحل لا يخالف الحل السابق الا في الصورة لان ظا $\tfrac{1}{2}$ (ح+ى) من حيث انه مساو ظت $\tfrac{1}{2}$ ه يكون مقدار ظا ع عين مقدار ظا $\tfrac{1}{2}$ (ح ـ ى) الناتج من متناسبة (١) وحينئذ يكون مقدار ه' السابق عين ما نتج من قانون (٣)

يوجد غالبا فى العمليات ان الاضلاع تعلم من لوغاريتماتها ولنفرض ان ح و ءَ كذلك وان زاوية هـ معلومة والمطلوب معرفة زاويتى ح و ء وحينئذ لاجل تعيين $\frac{1}{2}$ (ح ــ ء) بواسطة متناسبة (١) يلزم قبل كل شئ ان نبحث عن حَ و ءَ فى الجداول ويمكن اجتناب هذا البحث باستعمال زاوية مساعدة بان يفرض ان زاوية ع الزاوية المعلومة بوضع

ظا ع = $\frac{ءَ}{حَ}$ ومن قانون (٢) السابق فى بند (٣٤) يحدث

$$ظا (٤٥^\circ ــ ع) = \frac{ظا ٤٥^\circ ــ ظا ع}{١ + ظا ٤٥^\circ ظا ع} = \frac{١ ــ ظا ع}{١ + ظا ع}$$

وبوضع مقدار ظا ع بدلا عنه يحدث

$$ظا (٤٥^\circ ــ ع) = \frac{حَ ــ ءَ}{حَ + ءَ}$$

ومن متناسبة (١) السابقة يحدث

$$ظا \tfrac{1}{2} (ح ــ ء) = \frac{حَ ــ ءَ}{حَ + ءَ} ظا \tfrac{1}{2} (ح + ء)$$ فيكون

$$ظا \tfrac{1}{2} (ح ــ ء) = ظا (٤٥^\circ ــ ع) ظا \tfrac{1}{2} (ح + ء)$$

اى انه حيث كان ع معلوما يوجد بالسهولة $\frac{1}{2}$ (ح ــ ء) وبهذه الطريقة ينقص لوغاريتمان لا يحتاج لحسابهما بخلاف ما لو تعين ضلعا ح و ء

(٨١)

الحالة الرابعة

اذا فرض ان الاضلاع الثلاثة حَ و ءَ و هَ معلومة والمطلوب ايجاد الزوايا الثلاث ح و ء و هـ

قلنا من الدعوى الرابعة النظرية يحدث $حَ^٢ = ءَ^٢ ــ ٢ ءَ هَ$ جت ح ومن ذلك يستخرج

$$جت ح = \frac{ءَ^٢ + هَ^٢ ــ حَ^٢}{٢ ءَ هَ}$$

ويمكن تعيين زاويتى د و ه بمثل هذه الكيفية غاية مافيه انه يجب البحث عن قانون آخر سهل الحساب باللوغاريتمات فبند (٣١) يفيد قانون

$$2\,\text{جا}^2\tfrac{1}{2}\text{ح} = 1 - \text{جت}\,\text{ح}$$

فبوضع مقدار جت ح السابق عوضا عنه يحدث

$$2\,\text{جا}^2\tfrac{1}{2}\text{ح} = 1 - \frac{\text{د}^2+\text{ه}^2-\text{ح}^2}{2\,\text{د}\,\text{ه}} = \frac{\text{ح}^2-\text{د}^2-\text{ه}^2+2\,\text{د}\,\text{ه}}{2\,\text{د}\,\text{ه}} =$$

$$\frac{\text{ح}^2-(\text{د}-\text{ه})^2}{2\,\text{د}\,\text{ه}} = \frac{(\text{ح}+\text{د}-\text{ه})(\text{ح}-\text{د}+\text{ه})}{2\,\text{د}\,\text{ه}}$$

فيكون

$$\text{جا}\tfrac{1}{2}\text{ح} = \sqrt{\frac{(\text{ح}+\text{د}-\text{ه})\,(\text{ح}-\text{د}+\text{ه})}{4\,\text{د}\,\text{ه}}}$$

ولاختصار هذا القانون يفرض ان مجموع الاضلاع الثلاثة $\text{ح}+\text{د}+\text{ه} = 2\,\text{م}$ فيكون

$$\text{ح}+\text{د}-\text{ه} = 2\text{م}-2\text{ه} = 2\,(\text{م}-\text{ه}) \quad \text{و}$$

$$\text{ح}-\text{د}+\text{ه} = 2\text{م}-2\text{د} = 2\,(\text{م}-\text{د})$$

فعلى هذا يحدث

$$\text{جا}\tfrac{1}{2}\text{ح} = \sqrt{\frac{(\text{م}-\text{د})\,(\text{م}-\text{ه})}{\text{د}\,\text{ه}}}$$

ويؤخذ من ذلك قاعدة هى انك اذا طرحت من نصف مجموع الثلاثة اضلاع على التناوب الضلعين المجاورين للزاوية المطلوبة ثم قسمت حاصل ضرب هذين الفاضلين على حاصل ضرب الضلعين المذكورين ثم اخذت خارج القسمة وجدت جيب نصف الزاوية المطلوبة

واعلم ان زاوية نصف ح وان كانت معينة بواسطة جيبها لا ارتباك فيها لان زاوية ح زاوية من المثلث فيلزم ان يكون $\text{ح} < 180^\circ$ و $\tfrac{1}{2}\text{ح} < 90^\circ$

(٨٢)

ويمكن تحصيل قوانين بها يتعين $\text{جت}\tfrac{1}{2}\text{ح}$ و $\text{ظا}\tfrac{1}{2}\text{ح}$ بطريقة سهلة

كالمتقدمة لانه اذا انتبه الى ان $٢ جت^٢ \frac{١}{٢} حـ = ١ + جت حـ$ كما سبق في بند (٣١) واجرى على جت حـ من النحو بلاث ما اجرى على $جا \frac{١}{٢} حـ$ يوجد

$$جت \frac{١}{٢} حـ = \sqrt{\frac{م(م - حَ)}{ءَ هَ}}$$

فاذا قسم مقدار $جا \frac{١}{٢} حـ$ على مقدار $جت \frac{١}{٢} حـ$ يوجد هذا القانون

$$ظا \frac{١}{٢} حـ = \sqrt{\frac{(م - ءَ)(م - هَ)}{م(م - حَ)}}$$

وحيث كان كل من القوانين الثلاثة السابقة يستلزم البحث عن اربع لوغاريتمات فلا مرجح لاحدها على ما عداه اذا اريد تعيين زاوية واحدة من المثلث اما اذا ريد تعيين زاويتين فالاحسن استعمال القانون الاخير منها لانه يكفي فيه البحث عن لوغاريتمات الكميات الاربع التي هي م و م − حَ و م − ءَ و م − هَ ولو استعمل الاثنان الاولان للزم البحث عن ستة لوغاريتمات

(٨٣)

من المعلوم انه لا يمكن دائما رسم مثلث بمعرفة ثلاثة اضلاع مفروضة حيث ما اتفق ولنبرهن على ان هذه الاستحالة ناشئة من ذات الحسابات فنفرض اننا نستعمل قانون

$$جا \frac{١}{٢} حـ = \sqrt{\frac{(م - ءَ)(م - هَ)}{ءَ هَ}}$$

فلو كان رسم المثلث ممكنا لزم ان يكون مقدار $جا \frac{١}{٢} حـ$ حقيقيا واقل من واحد واذا لم يكن رسمه ممكنا يكون مقدار $جا \frac{١}{٢} حـ$ اما تخيليا واما اكبر من واحد وشرط عدم الامكان ان يكون كل ضلع اكبر من مجموع الاثنين الآخرين وهاك نتائج تحدث من القانون المعلوم

الاولى اذا فرض ان $ءَ > حَ + هَ$ يحدث

$٢ ءَ > حَ + ءَ + هَ$ وحينئذ يكون $٢ ءَ > ٢ م$

فعلى هذا يكون $م - ءَ < ٠$ ومعلوم بداهة ان $حَ + ءَ > هَ$ فيكون

حَ + ءَ + هَ او ٢م > ٢هَ فيثبت ان م ــ هَ > ٠ فيكون مقدار جا ½ حـ تخيليا

الثانية اذا فرض ان هَ > حَ + ءَ ينتج ان م ــ هَ < ٠ و م ــ ءَ > ٠ اعنى ان مقدار جا ½ حـ تخيلى ايضا

الثالثة اذا فرض ان حَ > ءَ + هَ يحدث حَ + ءَ + هَ او ٢م > ٢ءَ + ٢هَ فيكون م > ءَ + هَ فيثبت ايضا م ــ ءَ > هَ و م ــ هَ > ءَ و (م ــ ءَ) (م ــ هَ) > هَ ءَ

فينتج من ذلك ان مقدار جا ½ حـ > ١ وذلك غير موافق لاى زاوية كانت

عمليات رقية

(٨٤)

العمليات الكبرى المساحية تستلزم عدة آلات لا يمكن وصفها هنا غاية ما هنالك نذكر بعض ملحوظات تكفى فى تفهيم هذه العمليات فنقول

لاجل رسم خط مستقيم على الارض تستعمل شواخص ترشق مبتعدة عن بعضها على خط مستقيم بحيث اذا وقع البصر على اول شاخص منها يتوارى به غيره من بقية الشواخص عن البصر ثم يرسم احدى الزوايا على الورق بواسطة آلة النقل او برق الناقل وهو نصف دائرة منقسم الى درج

وهنالك عدة آلات تستعمل لقياس الزوايا سواء على الارض او فى الفراغ ومن ذلك الجرافوميتر والبوصلة ودائرة التكرار الخ وهذه الالات مصنوعة على العموم من دائرة او قطع دائرة عليها نصف قطر مثبت وآخر متحرك على مركزها يوجه الى اى جهة اريدت وكذلك سطح الدائرة يمكن ان يدور حول مركزها متى احتيج لمعرفة زاوية بين خطوط مستقيمة مارة من نقطة معلومة الى نقطتين معلومتين ويجب وضع مركز الآلة فى النقطة المعلومة ويوجه نصفا القطرين نحو النقطتين الاخريين ويقرء عدد الدرج المنحصر بين نصفى القطرين على المحيط فيكون هذا العدد هو مقدار الزاوية المطلوبة وهنا اوان الشروع فى العمليات

وليعلم المطلع على هذا الكتاب ان الحسابات جارية على مقتضى الطريقة التى سبقت فى بند (٦١)

(٨٥)

العملية الاولى انظر شكل (١٩)

اذا فرضنا فى مثلث حده القائم الزاوية فى نقطة ح ان
ح = ١٧٨٥,٣٩٥ م و د = ٢ً ٤٢ً ٣٧ ٥٩° والمطلوب ايجاد هـ و د
و هـ كما فى بند (٦٩) يقال اذا طرحت زاوية د من ٩٠° يحدث
هـ = ٩٠° — ٢ً ٤٢ً ٣٧ ٥٩° = ١٨ ٢٢ ٣٠°
فيبقى البحث عن ايجاد ضلعى د و هـ وها هى طريقة ايجاد كل منهما

(حساب ضلع د) د = ح جا د	(حساب ضلع هـ) هـ = ح جت د
لوجا ٢ً ٤٢ ٣٧ ٥٩° = ٩,٩٣٥٨٩١٩	لوجت ٢ً ٤٢ ٣٧ ٥٩° = ٩,٧٠٣٨١٣٢
لو ١٧٨٥,٣٩٥ = ٣,٢٥١٧٣٤٣	لو ١٧٨٥, ٣٩٥ = ٣,٢٥١٧٣٤٣
لو د ٠٠٠٠٠٠ = ٣,١٨٧٦٢٦٢	لو هـ ٠٠٠٠٠٠٠ = ٢,٩٥٥٥٤٧٥
فيكون د = ١٥٤٠,٣٧٤ م	فيكون هـ = ٩٠٢,٧٠٨ م

(٨٦)

العملية الثانية شكل (٢٠)

اذا فرضنا فى مثلث حده ان ح = ٢٥٩٧,٨٤٥ م و
د = ٣٠٨٤,٣٢٧ م و ح = ٤٧ً ١٢ً ٥٦° والمطلوب ايجاد د و
هـ و هـ كما فى بند (٧٤) يوضع هكذا

(حساب زاوية د) ح : د :: جا ح : جا د	(ولهذا السؤال حلان)
لو جا ٤٧ً ١٢ً ٥٦° = ٩,٩١٩٦٥٩٢	الاول فيه د = ٤٣ً ٣٩ ٨٠°
لو ٣٠٨٤, ٣٢٧ = ٣,٤٨٩١٦٠٤	الثانى فيه د = ١٧ً ٢٠ ٩٩°
لوَ ٢٥٩٧, ٨٤٥ = ٦,٥٨٥٣٨٦٨	
لو جا د ٠٠٠٠٠٠٠ = ٩,٩٩٤٢٠٦٤	

الحل الاول د = ٤٣″ ٣٩ ٨٠°

(حساب زاوية هـ) هـ = ١٨٠° − ح − د

١٨٠°

ح = ٤٧ ١٢ ٥٦°

د = ٤٣ ٣٩ ٨٠

هـ = ٣٠ ٧ ٤٣

الحل الثانى د = ١٧ ٢٠ ٩٩°

(حساب زاوية هـ) هـ = ١٨٠° − ح − د

١٨٠°

ح = ٤٧ ١٢ ٥٦°

د = ١٧ ٢٠ ٩٩°

هـ = ٥٦ ٢٦ ٢٤°

(حساب ضلع هَ) جاح : جاهـ :: حَ : هَ

لو ٢٥٩٧,٨٤٥ = ٣,٤١٤٦١٣٢

لو جا ٣٠ ٧ ٤٣° = ٩,٨٣٤٧٩٧٢

لوَجا ٤٧ ١٢ ٥٦° = ٠,٠٨٠٣٤٠٨

لو هَ .... = ٣,٣٢٩٧٥١٢

فيكون هَ = ٢١٣٦,٧٣٧ م

(حساب ضلع هَ) جاح : جاهـ :: حَ : هَ (١)

لو ٢٥٩٧,٨٤٥ = ٣,٤١٤٦١٣٢

لو جا ٥٦″ ٢٦′ ٢٤° = ٩,٦١٦٨٧٥٩

لوَجا ٤٧ ١٢ ٧٦° = ٠,٠٨٠٣٤٠٨

لو هَ .... = ٣,١١١٨٢٩٩

فيكون هَ = ١٢٩٣,٦٨٩ م

(٨٧)

العملية الثالثة (شكل ٢٠)

اذا كان المطلوب ايجاد نقطة هـ على الارض بواسطة معرفة بعدى حَ و دَ من نقطتين معلومتين ح و د يقال اذا كان المثلث ح د هـ غير عظيم الاتساع يرسم قوسا دائرة من نقطتى ح و د مجعولتين مركزا ببعدين معلومين هما حَ و دَ معتبرين نصفى قطر وحيث لم يمكن اجراء هذه العملية بان كانت الابعاد عظيمة الاتساع يلزم ان يقاس اولا بعد ح د وحينئذ تعلم الاضلاع الثلاثة من مثلث ح د هـ ويسهل حساب زاوية ح كما فى بند (٨١) وحينئذ يتعين اتجاه ضلع ح هـ ولا يبقى الا التقدم فى هذه الجهة بقدر البعد المعلوم ح هـ = دَ

فاذا فرض ان ىَ = ٩٤٥٩,٣١ م و ىَ = ٨٠٣٢,٢٩ م و

هَ = ٨٢٤٢,٥٨ م يحدث ٢م = ٢٥٧٣٤,١٨ و م = ١٢٨٦٧,٠٩

و م – ىَ = ٤٨٣٤,٨٠ و م – هَ = ٤٦٢٤,٥١

و جا ½ ح = √((م – ىَ) (م – هَ) / ىَ هَ)

حسابات هذا السؤال

لو (م – ىَ) .... =	٣, ٦٨٤٣٧٨٥
لو (م – هَ) .... =	٣, ٦٦٥٠٦٥٧
لوَ ىَ .... =	٦, ٠٩٥١٦٠٦
لوَ هَ .... =	٦, ٠٨٣٩٣٦٨
٢ لوجا ½ ح .... =	١٩, ٥٢٨٥٤١٦
لوجا ½ ح .... =	٩, ٧٦٤٢٧٠٨

½ ح = ٣٥° ٣١َ ٤٧ً

فيكون ح = ٧١° ٣َ ٣٤ً

(٨٨)

العملية الرابعة شكل (٢١)

اذا كان المطلوب ايجاد ارتفاع حى لعمارة يمكن الوصول الى اسفلها يقاس على ارض مستوية قاعدة ىه من ابتداء الاسفل ولاجل اجتناب الزوايا الصغرى يلزم ان تكون هذه القاعدة لا صغيرة جدا ولا كبيرة كذلك بالنسبة لارتفاع حى ثم توضع فى نقطة ه ارجل الالة التى تقاس بها زاوية ف ىَ ح الحادثة من ىَ ح مع الخط الافقى ىَ ف الموازى لخط هى

وحيث كان ضلع ىَ ف وزاوية ىَ فى مثلث ح ف ىَ القائم الزاوية معلومين يمكن حساب ح ف كما فى بند (٧٠) وبجمع ه ىَ الى ح ف يعرف الارتفاع المطلوب الذى هو حى

ولنفرض ان هـ ءَ = ١٠ر١ م و ءَف = ٢٨ر٦١ م و
ءَ = ٥ً ٣١ ٤١° فيحدث
حف = ٢٨ر٦١ × ظا ٥ً ٣١ ٤١°
لوظا ٥ً ٣١ ٤١° = ٩ر٩٤٢١٦٩٠
لو ٢٨ر٦١ = ١ر٧٨٧٣١٨٨

لو حف = ١ر٧٣٤٤٨٧٨

فيكون حف = ٥٤ر٢٦١ م حء = ٥٥ر٣٦١ م

اما اذا كان اسفل العمارة غير ممكن الوصول اليه او كان حء ارتفاع تل مرتفع عن الارض المجاورة له كما فى شكل (٢٢) فان موقع ذلك الارتفاع يكون مجهولا ولا يمكن قياس بعد ءهـ لكن يمكن قياس زاوية حءَ ف لانه يمكن بدون ايجاد خط ءح جعل سطح الدآئرة الذى تقاس به الزوايا يمر بالخط الراسى الذى هو حء وايضا يمكن تعيين بعد حءَ كما نذكره فى العملية الآتية فيعلم من ذلك وتر حءَ وزاوية ءَو وحينئذ يمكن ايجاد مسافة حف كما فى بند (٦٩)

(٨٩)

العملية الخامسة (شكل ٢٣)

اذا كان المطلوب ايجاد البعد الكائن بين نقطة ح المعلومة التى هى محل الوقوف ونقطة هـ البعيدة عنها ولم يمكن الوصول اليها تقاس اولا قاعدة حء ثم زاوية هـحء وزاوية هـءح وحينئذ يمكن تعيين بعد حهـ كما فى بند (٧٣)

ولنفرض ان المعاليم حء = ٢٤٧ر٤٩ م وح = ١َ ٤ ٦٢° و ء = ٢َ ٤ ٥٩° فمن ذلك يحدث هـ = ٣٧َ ٥٧° ويمكن حساب بعد حهـ كما تراه هنا هكذا

جاھ : جاد :: حد : حھ

لو حد=٢,٣٩٣٥٥٧٧

لو جاد=٩,٩٣٦٢٠٩٨

لَو جاھ=٠,٠٧٣٤٠٨٧

لو حھ=٢,٤٠٣١٧٦٢ فيكون البعد المطلوب

ھح=٢٥٣,٠٣٢ م

(٩٠)

العملية السادسة شكل (٢٤)

اذا كان المطلوب ايجاد بعد ھو الكائن بين محلين لا يمكن الوصول اليهما لكنهما مرئيان

تقاس قاعدة حد والزوايا التي هي دحو و دحھ وحدو و حدھ ثم يعين ضلع حو من مثلث حود بالطريقة التي سبقت ومن مثلث حدھ ضلع حھ ومن حيث ان زاوية وحھ معلومة بسبب ان النقط الاربع ح و د و ھ و في سطح مستو نجد وحھ = دحو ــ دحھ وعلى كل حال يمكن ايجاد هذه الزاوية بقياسها بدون عائق وبهذا نكون قد علمنا من مثلث وحھ ضلعين والزاوية التي بينهما فيسهل ايجاد ضلع ھو كما في بند (٧٧)

ولنفرض ان المقاليم حد=٢٩,٣٤٥ م و دحو= ٢َ ٦ و ٦٩° و دحھ=٣١َ ٤٤° وحھ=٤١َ ٢٥° وحدو= ٥١َ ٤٨° و حدھ= ٤١َ ٢ ١٠٢°

فمن ذلك ينتج حالا مقداران حود= ١٩َ ٦٢° و حھد= ١٥َ ٣٣° ثم تعمل الحسابات هكذا

(الاول حساب ضلع حو)

جا حوى : جاحدو :: حد : حو

لو حد = ٢,٥٣٨١٨٤٠

لو جاحدو = ٩,٨٧٢٧٧٢٢

لوَ جاحود = ٠,٠٥٢٧٩٧٣

لو حو = ٢,٤٦٣٧٥٣٥

فيكون حو = ٢٩٠,٩٠٧ م

(الثانى حساب ضلع حه)

جاحهد : جاحده :: حد : حه

لو حد = ٢,٥٣٨١٨٤٠

لوجاحده = ٩,٩٩٠٠٢٤٧

لوَجا حهد = ٠,٢٦٠٩٨٧١

لو حه = ٢,٧٨٩١٩٥٨ فيكون

حه = ٦١٥,٤٥٤ م

(الثالث حساب زاويتى و وه)

اذا فرضنا ان حه = حَ و حو = وَ و حوه = ه و حهو = و يوجد

وَ + هَ = ٩٠٦,٣٦١ و وَ ـ هَ = ٣٢٤,٥٤٧ م و

$\frac{1}{2}$(ه+و) = ″٣٠ ′٩ °٧٧ ثم يوضع

وَ + هَ : وَ ـ هَ :: ظا$\frac{1}{2}$(و+ه) : ظا$\frac{1}{2}$(و ـ ه)

لوظا$\frac{1}{2}$(ه+و) = ١٠,٦٤٢١٤٢٧

لو (وَ ـ هَ) = ٢,٥١١٢٧٧٦

لوَ (وَ+هَ) = ٧,٠٤٢٦٩٨٨

لوظا$\frac{1}{2}$(و ـ ه) = ١٠,١٩٦١١٩١

فيكون $\frac{1}{2}$(و ـ ه) = ″٦ ′٣١ °٥٧ فينتج من ذلك

و = ″٣٦ ′٤٠ °١٣٤ و ه = ″٢٤ ′٣٨ °١٩

(الرابع حساب ضلع وهـ)

جاهـ : جاوحهـ :: و : وهـ

لو هَ = ٣٫٤٦٣٧٥٣٥

لو جا وحهـ = ٩٫٦٣٦٨٨٥٩

لوَ جا هـ = ٠٫٤٧٣٥١٩٦

لو وهـ = ٢٫٥٧٤١٥٩٠

فيكون وهـ = ٣٧٥٫١١٠ م

(٩١)

ولهذا السؤال حل آخر نذكره فنقول قد علم انه لا يمكن تعيين بعدى حو و حهـ الا بواسطة لوغارتميهما والفرض الا ن تعيين ذلك باستعمال زاوية ع المساعدة التي تكلمنا عليها في بند (٨٠) فنبحث بعد ايجاد لو حو و لو حهـ عن زاويتى و هـ هكذا

(حساب زاوية ع)	(حساب زاويتى و و هـ)
ظا ع = حو / حهـ	ظا ½ (و ــ هـ) = ظا ½ (هـ + و) ظا ٤٥ ــ ع
لو حو = ٢٫٤٦٣٧٥٣٥	لو ظا ½ (و + هـ) = ١٠٫٦٤٢١٤٢٧
لو حهـ = ٢٫٤٠٩٠٤٢ ٧	لو ظا (٤٥ ــ ع) = ٩٫٥٥٣٩٧٩٠
لو ظا ع = ٩٫٦٧٤٥٥٧٧	لو ظا ½ (و ــ هـ) = ١٠٫١٩٦١٢١٧
ع = ٢٥° ١٧َ ٥٥ً	فيكون ½ (و ــ هـ) = ٥٧° ٣١َ ٦ً

فيكون ٤٥ ــ ع = ١٩° ٤٢َ ٥ً وعلى ذلك فقس بقية الحسابات

(٩٢)

العملية السابعة

اذا فرضنا ان ثلاث نقط ح و ى و هـ على ارض مستوية معلومة والمطلوب ايجاد نقطة م التى يرى منها بعدا حى و حهـ فى زوايا معلومة

يقال

الطريقة التي يبحث فيها اولا عن زاويتي حدم و حده

وذلك ان نفرض المعاليم حد = ح َ و حه = ء َ و ءحه

حمه = ع َ

والمجاهيل حدم = س و حهم = ص

ثم نقول ان ذا الاربعة اضلاع حدمه يحدث منه

س + ص = ٣٦٠° − (ح + ع + ع َ)

ومن ذلك يعلم مجموع زاويتي س و ص ولنبحث الا

فنقول مثلثا حدم و حهم يحدث منـ

(١) { ظا ع : جاس :: ح َ : حم
جا ع َ : جاص :: ء َ : حم

وبالتسوية بين مقداري حم يحدث

ح َ جاس / جاع = ء َ جاص / جاع َ او ء َ جاع / ح َ جاع َ = جاس / جاص

ولنضع ط = ح َ جاع / جاع وكمية ط يسهل تعيينها بواسطة اللـ

يحدث

ء َ / ط = جاس / جاص ومنها

يؤخذ ء َ + ط / ء َ − ط = جاس + جاص / جاس − جاص

وبذلك يثبت كما في بند (٤٠) ان

ء َ + ط / ء َ − ط = ظا ½(س + ص) / ظا ½(س − ص)

وحيث ان مجموع س + ص معلوم فالفاضل الذي

يكون معلوما ايضا بواسطة هذه المعادلة الاخيرة وبـ

س و ص بسهولة وحينئذ تكون زاوية د ح م = ١٨٠° − (حَ + سَ)
ويعلم ايضا ح م من احد متناسبات (١)

الباب الثالث

فى بيان المثلثات الكروية

فى النسب الواقعة بين زوايا مثلث كروى وبين اضلاعه

قانون اصلى

(٩٣)

اجزاء المثلث الكروى المرسوم على كرة معلومة تتعين بمعرفة عدد الدرج المشتمل عليها كل واحد من تلك الاجزاء فحل مسائل المثلثات الكروية متوقف على الارتباطات التى بين عدد هذا الدرج اعنى بين الاعداد المثلثية المقابلة لها من حيث الجيب وجيب التمام الخ فلذلك يجب اولا ان نبحث عن القانون الرابط لاحد الزوايا بالثلاثة الاضلاع ثم نبين كيفية استنتاج حل جميع الاحوال التى يمكن ان تطرء على مسائل المثلثات الكروية من ذلك فنقول نرمز دائما الى زوايا المثلث بحروف ح و د و هـ وللاضلاع المقابلة لها بحروف حَ و دَ و هـَ

ثم نفرض كما فى شكل (٢٦) ان و مركز الكرة المرسوم عليها مثلث ح د هـ ونرسم انصاف اقطار و ح و و د و و هـ ونقيم على و ح عمودين ح ر و ح ع احدهما فى مستوى و ح د والآخر فى مستوى و ح هـ ونفرض انهما يقابلان نصفى قطرى و د و و هـ اذا امدا فى نقطتى ر و ع فتكون زاوية ر ح ع مساوية لزاوية ح من المثلث الكروى فاذا جعل و ح واحدا يحدث

ح ر = ظا هـَ و و ر = قا هـَ و ح ع = ظا دَ

اذا علمت هذا يحدث من مثلثى .

رح و روح كما سبق فى بند (٦٦) معادلتا

$حر^2 + حع^2 - 2 حر \times حع جتء = رع^2$ و

$ور^2 + وع^2 - 2 ور \times وع جتء = رع^2$

فاذا طرحت المعادلة الاولى من الثانية ونبه على ان $\overline{ور}^2 - \overline{حر}^2 = \overline{وع}^2 - \overline{حع}^2 = 1$ ووضع بدل تلك الخطوط اسماؤها المثلثية وقسم باقى الطرح على ٢ يوجد

$1 - قاء قاه جتء + ظاء ظاه جتح = 0$

لكن حيث ان $قاء = \frac{1}{جتء}$ و $ظاء = \frac{جاء}{جتء}$ و $قاه = \frac{1}{جته}$

يكون

$1 - \frac{جتء}{جتء جته} + \frac{جاء جاه جتح}{جتء جته} = 0$ ومنها يستخرج

$جتء = جتء جته + جاء جاه جتح$ (١)

وهذا هو قانون حساب المثلثات الكروية الاصلى

(٩٤)

ضلعا ء و ه فى الشكل اقل من °٩٠ لكن يسهل ان يشاهد ان قانون واحد عام ولاثبات ذلك نفرض ان احد الاضلاع كضلع ء او حه اكبر من °٩٠ كما فى شكل (٢٧) ونمد نصفى محيط ه ح ه و ه ء ه حتى يتلاقيا فى نقطة ه فيحدث مثلث ح ء ه الذى ضلعاه ح و ء او ء ه و ح ه متممان لضلعى ء و ء

وزاوية ح ء ه متممة لزاوية ح ومن حيث ان ضلعى ء و ه اقل من °٩٠ يمكننا تطبيق قانون (١) على مثلث ح ء ه وينتج منه

$جتح = جتء جته + جاء جاه جت حءه$

لكن $ح = °180 - ح$ و $ء = °180 - ء$ و $حءه = °180 - ح$ فاذا وضعت هذه المقادير وغيرت اشارات الطرفين حدث قانون (١) بعينه فحينئذ يكون

هذا القانون مطابقاً للحالة التي فيها ىَ > ٩٠°

واذا فرض ان ضلعي ىَ و هَ يزيد عن ٩٠° كما في شكل (٢٨) ثم ضلعي ىد و ىه حتى يتلاقيا في نقطة حَ فيحدث مثلث ده حَ فيه زاوية حَ مساوية لزاوية ح وضلعا د و ه مساويان لمتممي ضلعي ىَ و هَ

فحينئذ حيث كان قانون (١) مطابقاً لهذا المثلث فلا يتغير بوضع ١٨٠° ــ ىَ و ١٨٠° ــ هَ بدل ىَ و هَ فان هذه الاوضاع لا تغير فيه شيأ

ويمكن ايضا تطبيق هذا القانون على الحالتين المفروض فيهما ىَ = ٩٠° و هَ = ٩٠° اما معا وكل واحدة على انفرادها وحيث ان هذا القانون يوافق جميع المقادير القريبة من ٩٠° يكون من الواضح ان يوجد في هاتين الحالتين ايضا

(٩٥)

ويمكن ايضا تطبيق القانون الاول على كل ضلع من اضلاع المثلث الكروى فتحدث ثلاث معادلات بين اجزآئه الستة التي هي الثلاثة الاضلاع والثلاث زوايا فاذا عرفت ثلاثة من تلك الاجزآء الستة امكن استخراج الثلاثة اجزآء الاخر لكن لابد لاجل العمل من ايجاد كل نسبة على حدتها بين اجزآء المثلث الكروى متكيفة بجميع ما يمكن فيها من الكيفيات فترجع كلها الى اربع مترتبات متباينة نتكلم عليها فنقول

(٩٦)

الاولى النسبة الواقعة بين ثلاثة اضلاع وزاوية وهي معادلة (١) السابقة التي يستخرج منها بواسطة التبديل ثلاث معادلات وهي

جتَ حَ = جتَ ىَ جتَ هَ + جاَ ىَ جاَ هَ جتَ ح (١)

جتَ ىَ = جتَ حَ جتَ هَ + جاَ حَ جاَ هَ جتَ د (٢)

جتَ هَ = جتَ ىَ جتَ حَ + جاَ ىَ جاَ حَ جتَ ه (٣)

(٩٧)

الثانية النسبة الواقعة بين ضلعين وزاويتين مقابلتين لاحدين الضلعين

لاجل ايجاد النسبة الموافقة لمرتبة حَ و ءَ و ح و ء يلزم ان تحذف كمية هً من معادلتى (١) و (٢) والطريقة المستقيمة فى ذلك ان يستخرج مقدارا $\text{جا}\,\text{هَ}$ و $\text{جت}\,\text{هَ}$ ثم يوضعان فى معادلة

$$\text{جا}^{٢}\,\text{هَ} + \text{جت}^{٢}\,\text{هَ} = \text{١}$$

ولنستعمل حسابا آخر كالسابق فى بند (٦٨) فنقول معادلة (١) يحدث منها

$$\text{جت}\,\text{ح} = \frac{\text{جت}\,\text{حَ} - \text{جت}\,\text{ءَ}\,\text{جت}\,\text{هَ}}{\text{جا}\,\text{ءَ}\,\text{جا}\,\text{هَ}} \quad \text{وحينئذ يحدث}$$

$$\text{جا}^{٢}\,\text{ح} = \text{١} - \text{جت}^{٢}\,\text{ح} = \text{١} - \frac{(\text{جت}\,\text{حَ} - \text{جت}\,\text{ءَ}\,\text{جت}\,\text{هَ})^{٢}}{\text{جا}^{٢}\,\text{ءَ}\,\text{جا}^{٢}\,\text{هَ}} =$$

$$= \frac{(\text{١} - \text{جت}^{٢}\,\text{ءَ})(\text{١} - \text{جت}^{٢}\,\text{هَ}) - (\text{جت}\,\text{حَ} - \text{جت}\,\text{ءَ}\,\text{جت}\,\text{هَ})^{٢}}{\text{جا}^{٢}\,\text{ءَ}\,\text{جا}^{٢}\,\text{هَ}} =$$

$$= \frac{\text{١} - \text{جت}^{٢}\,\text{حَ} - \text{جت}^{٢}\,\text{ءَ} - \text{جت}^{٢}\,\text{هَ} + \text{٢}\,\text{جت}\,\text{حَ}\,\text{جت}\,\text{ءَ}\,\text{جت}\,\text{هَ}}{\text{جا}^{٢}\,\text{ءَ}\,\text{جا}^{٢}\,\text{هَ}}$$

وينتج من ذلك

$$\frac{\text{جا}\,\text{ح}}{\text{جا}\,\text{حَ}} = \sqrt{\frac{\text{١} - \text{جت}^{٢}\,\text{حَ} - \text{جت}^{٢}\,\text{ءَ} - \text{جت}^{٢}\,\text{هَ} + \text{٢}\,\text{جت}\,\text{حَ}\,\text{جت}\,\text{ءَ}\,\text{جت}\,\text{هَ}}{\text{جا}\,\text{حَ}\,\text{جا}\,\text{ءَ}\,\text{جا}\,\text{هَ}}}$$

ولا اشكال هنا فى اشارة الجذر بناء على ان الزوايا والاضلاع كانت اقل من ١٨٠° فجيوبها تكون موجبة ومن حيث ان الطرف الثانى لا يزال ثابتا ولو تغير ح و حَ الى ء و ءَ وبالعكس اوالى ه و هَ وبالعكس يستنتج

$$\frac{\text{جا}\,\text{ح}}{\text{جا}\,\text{حَ}} = \frac{\text{جا}\,\text{ء}}{\text{جا}\,\text{ءَ}} = \frac{\text{جا}\,\text{ه}}{\text{جا}\,\text{هَ}} \quad (\text{٤})$$

فثبت ان نسبة جيوب الزوايا الى بعضها فى كل مثلث كروى كنسبة جيوب الاضلاع المقابلة الى بعضها .

(٩٨)

الثالثة النسبة الواقعة بين ضلعين وزاويتين احداهما بين هذين الضلعين والاخرى مقابلة لاحدهما

ولايجاد هذه النسبة تعتبر مرتبة حَ و ءَ و ح و هـ ويحذف اولا جتهَ من معادلة (١) و (٣) ليحصل جتحَ = جتحَ جت²ءَ + جتءَ جاءَ جاحَ جتهـ + جاءَ جاهَ جتح

فاذا حول جتحَ جت²ءَ الى الطرف الاول ونبه على ان جتحَ ـ جتحَ ـ جت²ءَ = جتءَ حَ جا²ءَ وقسم كل من الطرفين على جاءَ جاحَ نتج

(جتحَ جاءَ) / (جاحَ) = جتءَ جتهـ + (جاهَ جتح) / (جاحَ) لكن من حيث ان

(جاهَ) / (جاحَ) = (جاهـ) / (جاح) تكون النسبة المطلوبة هكذا

ظتحَ جاءَ = جتءَ جتهـ + جاهـ ظتح

وبتبديل الحروف ببعضها يحدث ست معادلات وهي

ظتحَ جاءَ = جتءَ جتهـ + جاهـ ظتح (٥)

ظتءَ جاحَ = جتحَ جتهـ + جاهـ ظتء (٦)

ظتحَ جاهَ = جتهَ جتء + جاء ظتح (٧)

ظتهَ جاحَ = جتحَ جتء + جاء ظتهـ (٨)

ظتءَ جاهَ = جتهَ جتح + جاح ظتء (٩)

ظتهَ جاءَ = جتءَ جتح + جاح ظتهـ (١٠)

(٩٩)

الرابعة النسبة بين ثلاث زوايا وضلع واحد ولم يبق الا البحث عنها

لايجاد هذه النسبة نحذف ءَ و هَ من معادلات (١) و (٢) و (٣) ثم نضع في الاولى مقدار جتهَ الذي استخرج من معادلة (٣) فيحدث كما سبق

جت حَ جاءَ / جاحَ = جت ءَ جت هـ + جاهَ جت ح / جاح

وهذه النسبة بواسطة هاتين المعادلتين

جاءَ / جاحَ = جاء / جاح و جاهَ / جاحَ = جاهـ / جاح

تتغير بسهولة الى هذه المعادلة الاخرى

جت حَ جاء = جت ء جت ءَ جت هـ + جت ح جاهـ

فاذا اجريت هذه الحسابات على معادلة (٢) اعنى غيرفيها مقدار ح و حَ بمقدار ء و ءَ اوبالعكس نتج

جت ءَ جاح = جت ح جاءَ جت هـ + جت ء جاهـ

فقد ثبت انه لم يبق ما يلزم حذفه الا جت ءَ من المعادلتين الاخيرتين فيوجد بعد الاختصار الكلى النسبة المطلوبة بين ح و ء و هـ و حَ واذا طبقت هذه النسبة على الثلاث زوايا بالتوالى نتجت هذه المعادلات الثلاث

جت ح = ــ جت ء جت هـ + جاء جاهـ جت حَ (١١)

جت ء = ــ جت ح جت هـ + جاح جاهـ جت ءَ (١٢)

جت هـ = ــ جت ح جت ء + جاح جاء جت هَ (١٣)

(١٠٠)

ومشابهة هذه المعادلات للقانون الاصلى ظاهرة جدا وينتج من ذلك نتيجة نفيسة وذلك اننا اذا تصورنا مثلثا ذكروياً ح١ هـ١ ء١ اضلاعه حً ءً هً متممة لزوايا ح و ء و هـ فبمقتضى القانون الاول يحدث

جت حً = جت ءً جت هً + جاءً جاهً جت ح١

ولكن من حيث ان جاحً = جاح و جت حً = ــ جت ح وجت ءً = جاء الخ يكون

ــ جت ح = جت ء جت هـ + جاء جاهـ جت ح١

ويستخرج من هذه المعادلة لكمية جت ح١ مقدار مساولمقدار جت حَ الناتج

من معادلة (١١) باشارة مخالفة له فيكون $ح=١٨٠°-ح_١$ كما ان $ى=١٨٠°-ى_١$ و $هـ=١٨٠°=هـ_١$

فينتج من ذلك النتيجة المشار اليها وهي انه اذا علم مثلث كروى ورسم مثلث آخر اضلاعه متممة لزوايا المثلث المعلوم تكون اضلاع الاول متممة لزوايا الآخر

ولهذا يقال لكل من المثلثين متممى ومن المعلوم في اصول الهندسة انه يمكن رسم كل منهما بجعل رؤس المثلث الآخر اقطابا له ولهذه العلة يسمى كل واحد من المثلثين المذكورين قطبي الآخر

(١٠١)

في نسب المهندس نيبير

ولنبرهن الان على النسب المسماة بنسب نيبير التي قد تستعمل لتسهيل بعض حالات من حل المثلثات الكروية فنقول

معادلة (١) و (٢) يحدث منهما

$جتهَ-جتىَجتهَ=جاى جاهَ جتح$

$جتى-جتح جتهَ=جاح جاهَ جتى$

فاذا قسم كل من هاتين المعادلتين على الاخرى ونبه على ان $\frac{جاح}{جاى}=\frac{جاح}{جاى}$

ينتج

$$\frac{جتى-جتح جتهَ}{جتى-جتح جتهَ}=\frac{جاح جتى}{جاى جتح}$$

فاذا وضعت هذه المعادلة على صورة متناسبة واعتبر فاضل حدود كل نسبة مع مجموع تلك الحدود فبالتحويلات السهل ادراكها يوجد

$$\frac{جتى-جتح}{جتى+جتح}\times\frac{١+جتهَ}{١-جتهَ}=\frac{جا(ح-ى)}{جا(ح+ى)}$$

ولكن بمقتضى القوانين المعلومة في بند (٤٠) و (٣٧) و (٣٩)

يحدث

يحدث

$$\frac{جت\ ى - جت\ ح}{جت\ ى + جت\ ح} = ظا\frac{١}{٢}(ح+ى)\ ظا\frac{١}{٢}(ح-ى)$$ و

$$\frac{١ + جت\ هـ}{١ - جت\ هـ} = \frac{١}{ظا^{٢}\frac{١}{٢}هـ}$$ و

$$جا\ (ح+د) = ٢\ جا\frac{١}{٢}(ح+د)\ جت\frac{١}{٢}(ح+د)$$

$$جا\ (ح-د) = ٢\ جا\frac{١}{٢}(ح-د)\ جت\frac{١}{٢}(ح-د)$$

فاذا وضعت هذه المقادير فى المعادلة التى قبلها حدث

$$ظا\frac{١}{٢}(ح+ى)\ ظا\frac{١}{٢}(ح-ى) = ٢\ ظا^{٢}\frac{١}{٢}هـ\ \frac{جا\frac{١}{٢}(ح-د)\ جت\frac{١}{٢}(ح-د)}{جا\frac{١}{٢}(ح+د)\ جت\frac{١}{٢}(ح+د)}\ (م)$$

ثم ان معادلة $\frac{جا\ ح}{جا\ ى} = \frac{جا\ ح}{جا\ د}$ يستخرج منها

$$\frac{جا\ ح + جا\ ى}{جا\ ح - جا\ ى} = \frac{جا\ ح + جا\ د}{جا\ ح - جا\ د}$$

ويمكن ان تحول هذه المعادلة الى معادلة اخرى كما فى بند (٤٠) و (٣٩) هكذا

$$\frac{ظا\frac{١}{٢}(ح+ى)}{ظا\frac{١}{٢}(ح+ى)} = \frac{جا\frac{١}{٢}(ح+د)\ جت\frac{١}{٢}(ح-د)}{جت\frac{١}{٢}(ح+د)\ جا\frac{١}{٢}(ح-د)}$$

فاذا ضربت هذه المعادلة فى معادلة (م) وقسمت كل منهما على الاخرى لا يبقى الا مربعات فاذا اخذ جذر هذه المربعات وتنبه بمقتضى معادلة (م) على ان اشارتى ظا $\frac{١}{٢}$ (ح+ى) و جت $\frac{١}{٢}$ (ح+د) متساويتان ينتج

$$ظا\frac{١}{٢}(ح+ى) = ظا\frac{١}{٢}هـ\ \frac{جت\frac{١}{٢}(ح-د)}{جت\frac{١}{٢}(ح+د)}\ (١٤)$$

$$\text{ظا}\tfrac{1}{2}(\acute{ح}-\acute{ء}) = \text{ظا}\tfrac{1}{2}\acute{هـ}\ \frac{\text{جا}\tfrac{1}{2}(ح-ء)}{\text{جا}\tfrac{1}{2}(ح+ء)} \quad (15)$$

ويمكن تطبيق هاتين المعادلتين على المثلث القطبي ولاجل ذلك يؤخذ ١٨٠° ـ ح و ١٨٠° ـ ء و ١٨٠° ـ هـ و ١٨٠° ـ حَ و ١٨٠ ـ ءَ بدل حَ و ءَ و هَ و ح و ء فينتج

$$\text{ظا}\tfrac{1}{2}(ح+ء) = \text{ظت}\tfrac{1}{2}هـ\ \frac{\text{جت}\tfrac{1}{2}(\acute{ح}-\acute{ء})}{\text{جت}\tfrac{1}{2}(\acute{ح}+\acute{ء})} \quad (16)$$

$$\text{ظا}\tfrac{1}{2}(ح-ء) = \text{ظت}\tfrac{1}{2}هـ\ \frac{\text{جا}\tfrac{1}{2}(\acute{ح}-\acute{ء})}{\text{جا}\tfrac{1}{2}(\acute{ح}+\acute{ء})} \quad (17)$$

فهذه القوانين الاربعة المذكورة التي على صورة متساويات هي المتناسبات التي اخترعها المهندس نبير والاوليان منها يستعملان فيما اذا كان المعلوم من المثلث الكروي ضلعا والزاويتين المجاورتين له والاخريان فيما اذا كان المعلوم ضلعين والزاوية التي بينهما

في النسبة بين اجزاء المثلثات الكروية القوائم الزاوية

(١٠٢)

لاجل ايجاد القوانين المتعلقة بحالات المثلث الكروي القائم الزاوية يكفي ان نفرض ح = ٩٠° في المتناسبات المتقدمة المشتملة على هذه الزاوية وبهذه الكيفية يوجد

(ا) جت حَ = جت ءَ جت هَ — كما في بند (٩٦)

(ب) جا ءَ = جا حَ جا ء و جا هَ = جا حَ جا هـ — كما في (٩٧)

(ح) ظا ءَ = ظا حَ جت هـ و ظا هَ = ظا حَ جت ء — (٩٨)

(ء) ظا ءَ = جا هَ ظا ء و ظا هَ = جا ءَ ظا هـ — (٩٨)

(هـ) جت ء = جا هـ جت ءَ و جت هـ = جا ء جت هَ — (٩٩)

(و) جت حَ = ظت ء ظت هـ — (٩٩)

فالقانون

فالقانون الاول من هذه القوانين الستة المتميزة السهلة العملية فى الحسابات اللوغارتمية يبين النسبة بين الوتر والضلعين المجاورين للزاوية القائمة والثانى منها يبين النسبة بين الوتر وضلع الزاوية المقابلة له والثالث يبين الوتر والضلع والزاوية المجاورة له والرابع يبين ضلعين والزاوية المقابلة لاحدهما والخامس يبين ضلعا والزاويتين الحادتين والسادس يبين الوتر والزاويتين الحادتين فاذا علم جزءآن من الاجزاء الخمسة من مثلث كروى قائم الزاوية حدث قانون به يستخرج اى جزء من الثلاثة اجزاء الباقية

(١٠٣)

ولننبه هنا على بعض خواص المثلثات الكروية الاضلاع القوائم الزاوية فنقول

الخاصة الاولى معادلة (١) تستلزم ان تكون اشارة جتـ ح عين اشارة حاصل ضرب جتـ ءجتـ هـ ولاجل ذلك يلزم ان تكون تمامات الجيوب الثلاثة موجبة او احداها فقط فعلى هذا تكون اضلاع المثلث الكروى القائم الزاوية اصغر من ٩٠° او اثنان منها اكبر من ٩٠° والثالث اصغر من ٩٠°

الخاصية الثانية قانونا (ى) يستلزمان ان تكون اشارة ظا ء عين اشارة ظاء واشارة ظاهـ عين اشارة ظاهـ فعلى هذا يكون الضلعان المجاوران للزاوية القائمة من نوع الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين اعنى ان الزاوية والضلع المتقابلين اصغر او اكبر من ٩٠°

فى حل المثلثات الكروية القوائم الزاوية

(١٠٤)

المثلث الكروى يمكن ان يكون فيه زاويتان قائمتان او ثلاثة فى الحالة الثانية يكون كل من الاضلاع الثلاثة مساويا لربع محيط الدائرة وفى الحالة الاولى يكون كل من الضلعين المقابلين للزاويتين القائمتين مساويا لربع محيط الدائرة والزاوية الثالثة معيارها الضلع الثالث وتلك الزاوية يكون مدلولا عليها بعدد

الدرج المشتمل عليه ذلك الضلع وفى الحالة الثانية تكون الثلاثة اضلاع مساوية لثلاثة ارباع المحيط وهاتان الحالتان لا يستدعيان التكلم عليهما وانما اللازم ان نتكلم على المثلث الكروى الذى فيه زاوية قائمة فقط ويكفى فى ايجاد هذا المثلث علم جزئين من الخمسة اجزاء ولذلك ست حالات نبينها فنقول

الحالة الاولى

(١٠٥)

اذا علم وتر حَ وضلع ءَ وكان المطلوب ايجاد ضلع هَ وزاويتى هـ و ء اخذت قوانين (أ) و (ب) و (ح) واستخرج منها

جتَ هَ = جتَ حَ / جتَ ءَ و جاء = جاءَ / جاحَ و جتَ هـ = ظاءَ / ظاحَ

ومن حيث ان الاقواس والزوايا التى نتكلم عليها لا تزيد عن °١٨٠ ولا يوجد فى هذه النهاية الاقوس واحد يقابل تمام الجيب المعلوم يتعين مقدار هَ و هـ بدون اشكال واما زاوية ء فمن حيث انها معلومة بمقدار جيبها المقابل يظهر انه يمكن اخذها اما حادة او منفرجة على حد سوآء لكن بمقتضى تنابيه (١٠٣) يلزم ان تكون تلك الزاوية من نوع الضلع المعلوم ءَ

(١٠٦)

الحالة الثانية

اذا كان المعلوم ضلعين ءَ و هَ والزاوية القائمة والمطلوب تعيين وتر حَ وزاويتى ء و هـ يقال

من قانونى (أ) و (د) يحدث

جتَ حَ = جتَ ءَ جتَ هَ و ظاء = ظاءَ / جاهَ و ظاهـ = ظاهَ / جاءَ

وظاهر ان هذه المقادير لا يكون فيها التباس

(١٠٧)

الحالة الثالثة

اذا كان المعلوم وتر ح وزاوية ى والمطلوب تعيين ضلعى ى و هَ وزاوية ه يقال

من قوانين (ب) و (ه) و (و) يحدث

جاى = جاح جاى و ظاهَ = ظاح جتى و ظته = جتح ظاى

ه و هَ يعينان بدون التباس وضلع ى يكون من جنس ى كما سبق فى بند (١٠٣)

(١٠٨)

الحالة الرابعة

اذا كان المعلوم ضلع ى المجاور للزاوية القائمة وزاوية ى المقابلة لذلك الضلع والمطلوب تعيين ضلعى ح و هَ وزاوية ه يقال

من قوانين (ب) و (ى) و (ه) يحدث

$$\text{جاح} = \frac{\text{جاى}}{\text{جاى}} \quad \text{و} \quad \text{جاه} = \frac{\text{ظاى}}{\text{ظاى}} \quad \text{و} \quad \text{جاه} = \frac{\text{جتى}}{\text{جتى}}$$

وهنا اشكال بسبب الجيوب ويسهل التحقق من انه لابدوان يوجد وذلك لانه اذا كان المثلث القائم الزاوية فى نقطة ح الذى هو حىه كافيا فى حل المسئلة يمد ضلعاه ه و ىح على استقامتهما حتى يلتقيا فى نقطة و ثم يؤخذ و$ح_1$ = ىح و ح$ه_1$ = ىه فيكون مثلثا حىه و$ح_1ه_1$ متساويى الاجزاء وتكون زاوية $ح_1$ قائمة ويكون ه$ح_1$ = هح = ى ويكون المثلث ى$ح_1ه_1$ قائم الزاوية ويشتمل على الجزئين المعلومين اللذين هما ى و ى فينتج من ذلك انه يمكن اخذ ح < ٩٠° او > ٩٠° ويمكن انك اذا اخترت واحدا منهما يكون جنس ضلع هَ معلوما من قانون

جتح = جتى جتهَ وهذا الضلع يكون ايضا من جنس زاوية ه

فاذا فرض ان ى = ى حدث مثلث قائم الزاويتين بخلاف ما اذا فرض

ان جاءَ > جاء فلا يوجد مثلث ابدا

(١٠٩)

الحالة الخامسة

اذا كان المعلوم ضلع ءَ المجاور للزاوية القائمة والزاوية المجاورة له هـ والمطلوب تعيين ضلعي حَ و هَ وزاوية ء يقال

من قوانين (ح) و (ء) و (هـ) يحدث

ظاحَ = ظاءَ / جتهـ و ظاهَ = جاءَ ظاهـ و جتء = جتءَ جاهـ

فمن ذلك يعلم حَ و هَ و ء بدون التباس

(١١٠)

الحالة السادسة

اذا كان المعلوم زاويتي ء و هـ الحادتين والمراد تعيين الاضلاع الثلاثة التي هي حَ و ءَ و هَ يقال

من معادلتي (و) و(هـ) يحدث

جتحَ = ظتءظتهـ و جتءَ = جتء / جاهـ وجتهَ = جتهـ / جاء

وهذه المقادير لا التباس فيها واذا كان المثلث مستحيلا عرف ذلك من عين هذه المقادير

(١١١)

(تنبيه)

كثير من احوال المثلثات الكروية يرجع الى حل المثلثات القوائم الزاوية وبيان ذلك ان نقول

الحالة الاولى اذا علم من مثلث كروي ثلاثة اجزاء منها ضلع يساوي ٩٠° كانت الزاوية المقابلة لهذا الضلع في المثلث قائمة فبذلك يكون المعلوم من المثلث القطبي جزئين من الخمسة اجزاء فيمكن حله بالطرق المتقدمة ومتى علم

هذا

هذا المثلث على المثلث الاصلى

الحالة الثانية اذا كان المثلث متساوى الساقين لا يعد الضلعان المتساويان الاجزأ واحدا وكذلك الزاويتان المقابلتان لهما او حينئذ فيكفى جزآن لتعيين المثلث لانه اذا وصل قوس دائرة عظمى من الرأس الى نصف القاعدة ينحل الى مثلثين قائمى الزاوية متساويين فى جميع اجزائهما ومعلوم فى كل منهما جزآن غير الزاوية القائمة فقد ثبت ان المثلثات المتساوية الساقين يمكن حلها بطريقة المثلثات القوائم الزاوية

الحالة الثالثة اذا فرض كما فى شكل (٣٠) ان حءه مثلث كروى فيه ح + ء = ١٨٠° ومد فيه ضلعا ح و هء حتى تلاقيا فى نقطة و يحدث ح + هو = ١٨٠° فيكون هو = ء وحيث ان كل جزء معلوم من مثلث حءه يعلم منه جزء من مثلث حهو المتساوى الساقين وبالعكس يكون حل المثلث الذى يوجد فيه حاصل مجموع الضلعين يساوى ١٨٠° راجعا الى حالة حل مثلث متساوى الساقين وبالضرورة الى حل مثلث قائم الزاوية

الحالة الرابعة يمكن تطبيق ما تقدم على المثلث الكروى الذى فيه زاويتان متممتان لبعضهما لانه لا يمكن وجود ح + ء = ١٨٠° بدون وجود ح + ء = ١٨٠° فى آن واحد وبالعكس لانه فى مثلث حءو المتساوى الساقين زاوية ءحو = و = ء فيكون هحو + هحء = ١٨٠° فيثبت ايضا فى مثلث حءه ان ح + ء = ١٨٠°

فى حل المثلثات الكروية اياما كانت

(١١٢)

الحالة الاولى

اذا كان المعلوم الاضلاع الثلاثة ح و ء و ه والمطلوب ايجاد الزوايا الثلاث ح و ء و ه يقال

لايجاد زاوية ح تؤخذ معادلة (١) التى سبقت فى بند (٩٦) ويستخرج منها

$$\text{جت ح} = \frac{\text{جت حَ} - \text{جت ءَ جت هَ}}{\text{جا ءَ جا هَ}}$$

لكن يمكن ايجاد مقدار آخر مناسب جدا اللوغارتمات بان يبحث عن $\text{جا}\frac{1}{2}\text{ح}$ و $\text{جت}\frac{1}{2}\text{ح}$ و $\text{ظا}\frac{1}{2}\text{ح}$ كما عمل فى حساب المثلثات المستقيمة الاضلاع فالنأخذ القانون السابق فى بند (٣١) الذى هو

$\text{٢ جا}^{2}\text{ح} = ١ - \text{جت ح}$ وبوضع جت ح فيه يحدث

$$\text{٢ جا}^{2}\frac{1}{2}\text{ح} = ١ - \frac{\text{جت حَ} - \text{جت ءَ جت هَ}}{\text{جا ءَ جا هَ}} =$$

$$= \frac{\text{جت ءَ جت هَ} + \text{جا ءَ جا هَ} - \text{جت حَ}}{\text{جا ءَ جا هَ}} = \frac{\text{جت}\ (\text{ءَ} - \text{هَ}) - \text{جت حَ}}{\text{جا ءَ جا هَ}}$$

واذا فرض* فى القانون المعلوم الذى هو

$\text{جت و} - \text{جت هـ} = \text{٢ جا}\frac{1}{2}(\text{هـ} + \text{و})\ \text{جا}\frac{1}{2}(\text{و} - \text{هـ})$ ان $\text{هـ} = \text{حَ}$ وان $\text{و} = \text{ءَ} - \text{هَ}$ يحدث

$\text{جت}(\text{ءَ} - \text{هَ}) - \text{جت حَ} = \text{٢ جا}\frac{1}{2}(\text{حَ} + \text{ءَ} - \text{هَ})\ \text{جا}\frac{1}{2}(\text{حَ} - \text{ءَ} + \text{هَ})$ فيكون

$$\text{جا}\frac{1}{2}\text{ح} = \sqrt{\frac{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{حَ} + \text{ءَ} - \text{هَ})\ \text{جا}\frac{1}{2}(\text{حَ} - \text{ءَ} + \text{هَ})}{\text{جا ءَ جا هَ}}}$$

ولاجل الاختصار نضع $\text{حَ} + \text{ءَ} + \text{هَ} = \text{٢م}$ فيحدث

$\text{ءَ} + \text{حَ} - \text{هَ} = ٢(\text{م} - \text{هَ})$ و $\text{حَ} - \text{ءَ} + \text{هَ} = ٢\ (\text{م} - \text{ءَ})$

وحينئذ يصير القانون السابق هكذا

$$\text{جا}\frac{1}{2}\text{ح} = \sqrt{\frac{\text{جا}(\text{م} - \text{ءَ})\ \text{جا}(\text{م} - \text{هَ})}{\text{جا ءَ جا هَ}}}$$

ويوجد ايضا

$$\text{جت}\ \tfrac{1}{2}\text{ح} = \sqrt{\frac{\text{جام جا(م} - \text{حَ)}}{\text{جاءَ جاهَ}}}$$

فينتج
$$\text{ظا}\ \tfrac{1}{2}\text{ح} = \sqrt{\frac{\text{جا(م} - \text{ءَ) جا(م} - \text{هَ)}}{\text{جام جا(م} - \text{حَ)}}}$$

(١١٣)

الحالة الثانية

اذا كان المعلوم ضلعى حَ و ءَ وزاوية ح المقابلة لاحدهما والمطلوب تعيين زاويتى هـ و ء وضلع هَ

يقال اولا ينبغى ايجاد زاوية ء المقابلة لضلع ءَ بوضع هذا التناسب

جاحَ : جاءَ :: جاح : جاء ومنه يستنتج

$$\text{جاء} = \frac{\text{جاح جاءَ}}{\text{جاحَ}}$$

ثم الاحسن ايجاد هَ و هـ من نسب نيبير السابقة فى بند (١٠١) فانه ينتج منها

$$\text{ظا}\ \tfrac{1}{2}\text{هَ} = \text{ظا}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{حَ} - \text{ءَ}) \frac{\text{جا}\ \tfrac{1}{2}(\text{ح} + \text{ء})}{\text{جا}\ \tfrac{1}{2}(\text{ح} - \text{ء})}$$

و

$$\text{ظت}\ \tfrac{1}{2}\text{هـ} = \text{ظا}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ح} - \text{ء}) \frac{\text{جا}\ \tfrac{1}{2}(\text{حَ} + \text{ءَ})}{\text{جا}\ \tfrac{1}{2}(\text{حَ} - \text{ءَ})}$$

وحيث ان زاوية ء تعرف من جيبها يمكن ان تكون حادة او منفرجة ومع ذلك لا يوجد لبعض مقادير معالم حَ و ءَ و ح الا مثلث واحد وسنذكر هذه الحالة فيما يأتى فى بند (١١٨) وهى تشبه ما قدمناه فى الحالة الثانية من المثلثات المستقيمة الاضلاع فى بند (٧٥)

ويمكن ايضا تعيين زاوية هـ بدون واسطة باخذ معادلة (٥) السابقة فى بند (٩٨) هكذا

ظت ح جاهـ + جت ءَ جت هـ = ظت حَ جا ءَ

والهذا يلزم اولا تعيين زاوية ع المساعدة بوضع

ظت ح = جت ءَ ظت ع فيكون

ظت ع = ظت ح / جت ءَ

ثم نضع فى معادلة ظت ح جا هـ + جت ءَ جت هـ = ظت حَ جا ءَ بدل

ظت ح مقداره الذى هو

ظت ح = ظت ءَ ظت ع = جت ءَ جت ع / جا ع الذى يوخذ منه

جت ءَ (جا هـ جت ع + جت هـ جا ع) = ظت حَ جا ءَ جا ع

ومن ذلك يستنتج

جا (هـ + ع) = ظا ءَ جا ع / ظا حَ

فيعلم من ذلك هـ + ع فاذا كان مثلا هـ + ع = م يكون

هـ = م ــ ع

وحيث علم مقدار هـ يعلم ضلع هَ من متناسبة

جا ح : جا هـ :: جا حَ : جا هَ

لكن اذا اريد تعيين هَ بدون واسطة وجبت الاستعانة بمعادلة (١) السابقة

فى بند (٩٦) وهى

جت ءَ جت هَ + جت ح جا ءَ جا هَ = جت حَ

فيلزم اختصار الطرق الاول وجعله حدا واحدا كما تقدم بواسطة زاوية ع

المساعدة بان توضع هذه المعادلة

جت ح جا ءَ = جت ءَ ظت ع

فيكون ظت ع = جت ح ظا ءَ وحينئذ فالمعادلة تصير

جت ءَ (جا ع جت هَ + جت ع جا هَ) = جت حَ جا ع او

جا (هَ + ع) = جت حَ جا ع / جت ءَ

فحينئذ يمكن بعد ايجاد زاوية ع ايجاد زاوية هـَ بالسهولة كما تقدم

(١١٤)

الحالة الثالثة

اذا كان المعلوم ضلعى حَ و ءَ والزاوية التى بينهما والمطلوب تعيين زاويتى ح و ء وضلع هـَ

يقال قانونا (٥) و (٦) المتقدمان فى بند (٥٨) يفيدان مقدارى ح و ء اللذان هما

$$\text{ظت ح} = \frac{\text{ظت حَ جا ءَ — جت ءَ جت هـ}}{\text{جا هـ}} \quad \text{و}$$

$$\text{ظت ء} = \frac{\text{ظت ءَ جا حَ — جت حَ جت هـ}}{\text{جا هـ}}$$

وبالاستعانة بزاويتين مساعدتين يسهل تحويل بسط كل مقدار الى حد واحد لكن الاسهل الاستعانة بنسب المهندس نبير المذكورة فى بند (١٠١) هكذا

$$\text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح+ء}) = \text{ظت} \tfrac{1}{2}\text{هـ} \; \frac{\text{جت} \tfrac{1}{2} (\text{حَ—ءَ})}{\text{جت} \tfrac{1}{2} (\text{حَ+ءَ})} \quad \text{و}$$

$$\text{ظا} \tfrac{1}{2} (\text{ح—ء}) = \text{ظت} \tfrac{1}{2}\text{هـ} \; \frac{\text{جا} \tfrac{1}{2} (\text{حَ—ءَ})}{\text{جا} \tfrac{1}{2} (\text{حَ+ءَ})}$$

فانه يعلم من هذين المقدارين $\tfrac{1}{2}$ (ح+ء) و $\tfrac{1}{2}$ (ح—ء) ومن ذلك يعلم ح و ء

ومتى علمت هاتان الزاويتان امكن ايجاد ضلع هـَ بواسطة هذه المتناسبة

جا ح : جا هـ :: جا حَ : جا هـَ لكن اذا اريد ايجاد هـَ بدون واسطة وجبت الاستعانة بالقانون المذكور فى بند (٩٦) الذى هو

$$\text{جت هـَ} = \text{جت حَ جت ءَ} + \text{جا حَ جا ءَ جت هـ}$$

المفروض فيه ان $\text{جاد جته} = \dfrac{\text{جتَدَ جتع}}{\text{جاع}} = \text{جتَدَ ظتع}$

وحينئذ يوجد بدون لبس هذان المقداران

$$\text{ظتع} = \text{ظاَدَ جته} \qquad \text{و جتهَ} = \frac{\text{جتَدَ جا}(\text{حَ}+\text{ع})}{\text{جاع}}$$

(١١٥)

الحالة الرابعة

اذا كان المعلوم زاويتى ح و د وضلع هَ المجاور لهاتين الزاويتين والمطلوب تعيين ضلعى حَ و دَ وزاوية ه

يقال يمكن ايجاد ضلعى حَ و دَ من قانونى (٧) و (٩) المتقدمين فى بند (٩٨) هكذا

$$\text{ظتحَ} = \frac{\text{ظتح جاد} + \text{جتد جتهَ}}{\text{حاهَ}}$$

$$\text{ظتدَ} = \frac{\text{جتد جاح} + \text{جتح جتهَ}}{\text{جاهَ}}$$

والاحسن ايجاد هذين الضلعين من نسبة المهندس نيبر فيحدث

$$\text{ظا}\tfrac{1}{2}(\text{حَ}+\text{دَ}) = \text{ظا}\tfrac{1}{2}\text{هَ}\,\frac{\text{جت}\tfrac{1}{2}(\text{ح}-\text{د})}{\text{جت}\tfrac{1}{2}(\text{ح}+\text{د})}$$

$$\text{ظا}\tfrac{1}{2}(\text{حَ}+\text{دَ}) = \text{ظا}\tfrac{1}{2}\text{هَ}\,\frac{\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{ح}-\text{د})}{\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{ح}+\text{د})}$$

فحينئذ تتعين زاوية ه بهذه المتناسبة

$$\text{جاحَ} : \text{جاهَ} :: \text{جاح} : \text{جاد}$$

واذا اريد تعيين زاوية ه بدون واسطة وجبت الاستعانة بالقانون السابق فى بند (٩٩) الذى هو

$$\text{جته} = \text{جتح جاد جتهَ} - \text{جتح جتد}$$

وبوضع جاء جتَ هَ = جتَ ء ظتَ ع   يحدث

$$\text{ظت ع = ظا ء جت هَ} \quad \text{و} \quad \text{جت هـ} = \frac{\text{جت ء جا(و ـ ع)}}{\text{جا ع}}$$

وهذه الحالة كالحالة الثالثة لا لبس فيها

(١١٦)

الحالة الخامسة

اذا كان المعلوم زاويتى ح و ء والضلع المقابل لاحديهما والمطلوب تعيين ضلعى ءَ و هَ وزاوية هـ

يقال ان هذه الحالة كالحالة الثانية فيجرى فيها ما جرى فى تلك وفيها عين اللبس الذى هناك ويمكن ايجاد ضلع ءَ من هذه المتناسبة

جا ح : جا ء :: جا حَ : جا ءَ كما يمكن ايجاد هـ و هَ من القوانين المستعملة فى بند (١١٣) فيحدث

$$\text{ظا} \tfrac{1}{2} \text{هَ} = \text{ظا} \tfrac{1}{2} \text{(حَ ـ ءَ)} \frac{\text{جا} \tfrac{1}{2}\text{(ح + ء)}}{\text{جا} \tfrac{1}{2}\text{(ح ـ ء)}} \quad \text{و}$$

$$\text{ظت} \tfrac{1}{2} \text{هـ} = \text{ظا} \tfrac{1}{2} \text{(ح ـ ء)} \frac{\text{جا} \tfrac{1}{2}\text{(حَ + ءَ)}}{\text{جا} \tfrac{1}{2}\text{(حَ ـ ءَ)}}$$

ويمكن ايجاد ضلع هَ من قانون (٧) المتقدم فى (٩٨) وهو ظت حَ جا هَ ـ جت ء جت هَ = ظت ح جا ء

وانفرض فى هذا القانون ان ظت حَ = جت ء ظت ع   فيحدث

$$\text{ظت ع} = \frac{\text{ظت حَ}}{\text{جت ء}} \quad \text{و} \quad \text{جا (هَ ـ ع)} = \frac{\text{ظا ء جا ع}}{\text{جا ح}}$$

وبالجملة فيمكن معرفة زاوية هـ ايضا بوضع جا حَ : جا هَ :: جا ح : جا هـ او بواسطة معادلة

جت حَ جا ء جا هـ ـ جت ء جت هـ = جت ح

السابقة فى بند (٩٩) ثم يختصر الطرف الاول ويجعل حدا واحدا بوضع

جت حَ جا ء = جت ء ظت ع   فيحدث

ظت ع = جت حَ ظا ى و جا (هـ ـ ع) = $\frac{\text{جت ح جا ع}}{\text{جت ى}}$

وهذه المقادير تعين زاوية ع و هـ ـ ع وبذلك تتعين زاوية هـ

(١١٧)

الحالة السادسة

اذا كان المعلوم الزوايا الثلاث ح و ى و هـ والمطلوب تعيين الاضلاع الثلاثة حَ و ىَ و هـَ

يقال ان هذه الحالة تنحل بمثل الحسابات المذكورة فى الحالة الاولى فاذا اريد تعيين ضلع حَ مثلا استعملت معادلة (١١) السابقة فى بند (٩٩) فيحدث عنها

$$\text{جت حَ} = \frac{\text{جت ح} + \text{جت ى جت هـ}}{\text{جا ى جا هـ}}$$

ثم بواسطة التحويلات الجارية فى الحالة المذكورة توجد مقادير جا $\frac{1}{2}$ حَ و جت $\frac{1}{2}$ حَ و ظا $\frac{1}{2}$ حَ وهذه المقادير سهلة الحسابات اللوغارتمية فاذا وضعنا ح + ى + هـ = ١٨٠° + ٢م حدث

$$\text{جا} \tfrac{1}{2} \text{حَ} = \sqrt{\frac{\text{جا م جا (ح ـ م)}}{\text{جا ى جا هـ}}}$$ و

$$\text{جت} \tfrac{1}{2} \text{حَ} = \sqrt{\frac{\text{جا (ى ـ م) جا (هـ ـ م)}}{\text{جا ى جا هـ}}}$$ و

$$\text{ظا} \tfrac{1}{2} \text{حَ} = \sqrt{\frac{\text{جا م جا (ح ـ م)}}{\text{جا ى ـ م جا (هـ ـ م)}}}$$

ومشابهة الاحوال الثلاث الاخيرة للثلاث الاول انما هى بسبب كونها ترجع اليها بواسطة خواص المثلث القطبى المذكور فى بند (١٠٠)

الكلام على الحالات المشكوك فيها من المثلثات الكروية

(١١٨)

ليس لنا حالات يشك فيها من حيث اصولها المجهولة الا الحالة الثانية والخامسة وغرضنا هذا البحث عن الدلائل التي يعرف بها لزوم حلين للمسئلة او حل واحد والتي يعرف بها استحالة المثلث ولنذكر قبل ذلك بعض مسائل يستند اليها فنقول

اذا اعتبر على كرة معلومة ان نصف دآئرة وهوَ كما في شكل (٣١) عمودياً على دآئرة كاملة وفوَ واخذنا هو < ٩٠° ووصلنا اقواس دوآئر عظمى هد و هدَ و هف ...... الخ من نقطة ه الى كل نقطة من نقط محيط دآئرة وفوَ ومددنا هو بقدر هَو ووصلنا بين هَ و د حدث مثلثان هود و هَود فيهما زاوية قائمة محصورة بين ضلعين متساويين فيكون هد = هَد وحيث ان هوهَ < هد + دهَ يكون هو < هد فينتج من ذلك اولا ان قوس هو < الاقواس المارة من نقطة ه الى محيط دآئرة وفوَ وحينئذ يكون > الاقواس هوَ

فاذا فرضنا ان وذ = ود فمثلثا هود و هوذ يكونان متساوى الزاوية القائمة المحصورة بين الضلعين المجاورين لهذه الزاوية فيكون هذ = هد فينتج ثانيا ان الاقواس الموآئل المتساوية الابعاد من ه و او من هوَ متساوية

واذا فرضنا ان وف > ود ووصلنا هَف ومددنا هد حتى تلاقى مع هَف في نقطة ـ يقال حيث ان قوس ههَ اقل من نصف دآئرة يلزم ان يتلاقى مع هد الممدود فيما ورآء نقطة هَ ويلزم من ذلك ان نقطة التقابل ـ تكون بين ف و هَ فيحدث هَد < هَـ + دـ و هَد + ده < هَـ + ـه ولكن حيث كان ـه < ـف + فه وبالضرورة هَـ + ـه < هَف + هف فبالاولوية ينتج ان هَد + ده < هَف + هف وحيث ان هَد = هد و هَف = فه يجب ان

يكون د‌ﻫ < ف‌ﻫ فينتج ثالثا ان الاقواس المواثل كلما بعدت عن ﻫو وقربت من ﻫوَ ازدادت كبرا

(١١٩)

ولنفرض الآن ان المطلوب رسم مثلث كروى معلوم منه ضلعا حَ و ءَ والزاوية المقابلة لضلع حَ

فننبه اولا على بعض احوال غير ممكنة الرسم كما تدل على ذلك الحسابات ثم نقول لاجل معرفة ذلك ترسم زاوية ﻫ ح ء = ح و ح‌ﻫ = ءَ كما فى شكل (٣٢) و (٣٣) ويمد ح‌ﻫ و ح‌ء حتى يتقابلا فى نقطة ط كما فى شكل (٣٢) ثم ينزل ﻫو عمودا على ح‌ط فيكون قوس ﻫو من نوع زاوية ح كما فى بند (١٠٣) فينبنى على ذلك ان زاوية ح اذا كانت حادة كان ﻫو اقرب المسافات بين نقطة ﻫ ونصف دائرة ح‌ط واكبر المسافات اذا كانت زاوية ح منفرجة كما فى النتيجة الاولى من بند (١١٨)

ثم ان رسم المثلث فى الفرض الاول غير ممكن اذا كان ح < ﻫو وينشأ منه ان جاحَ < جاﻫو وفى الفرض الثانى كذلك اذا كان حَ > ﻫو وينشأ منه ان جاحَ < جاﻫو وحيث ان المثلث القائم الزاوية ح‌ﻫو يحدث فيه

١ : جاءَ : : جاح : جاﻫو = جاءَ جاح

ففى الحالتين المفروضتين يحدث ان جاحَ < جاءَ جاح واذا بحثنا عن زاوية ء من المثلث المجهول ح‌ﻫء يحدث

$$\text{جاحَ : جاح : : جاءَ : جاء} = \frac{\text{جاءَ جاح}}{\text{جاحَ}}$$

فيكون مقدار جاء > ١ ومن ذلك يظهر انه لا يمكن رسم المثلث واذا فرض ان حَ = ﻫو لا يوجد الا المثلث القائم الزاوية ح‌ﻫو الذى يمكن رسمه وذلك يستفاد من مقدار جاء الذى يؤول الى جاء = ١

(١٢٠)

ولنترك الآن هذه الاحوال ونلتفت الى البحث عن ارتباطات الكبر المختلفة

الكائنة بين الكميات المعلومة حَ و ءَ و ح
فنفرض ح < ٩٠° و ءَ < ٩٠° كما في شكل (٣٢) وحيث ان
ح و ءَ < ٩٠° يكون ايضا حو < ٩٠° كما في بند (١٠٣)
فيكون حو < وط اذا ثبت هذا وكان حَ < ءَ كان من البين انه يمكن
ان يوضع بين هح و هو قوس مقداره هو = حَ ويمكن ايضا
ان يوضع بين هو و هط قوس آخر مقداره هءً = هء = حَ بمعنى
انه يوجد مثلثان حهء مرسومان بمعالم حَ و ءَ و ح
واذا كان حَ = ءَ خفي مثلث حءه وبقي حهءَ واذا كان حَ + ءَ
= ١٨٠° او حَ + ءَ > ١٨٠° صارت نقطة ءَ على نقطة ط
اوبعيدة عنها فلا يوجد من المثلثات شئ
وبهذه الكيفية تمتحن الفروض الاخر ولنضع جدولا نذكر فيه جميع نتائجها
ونشير فيه بعلامة ≮ الى المساوي او الاكبر وبعلامة ≯ الى المساوي او الاصغر
وهذه صورته

- ح < ٩٠°
  - ءَ < ٩٠°
    - حَ < ءَ لذلك حلان
    - حَ ≮ ءَ له حل واحد مالم يكن حَ + ءَ ≮ ١٨٠°
    - حَ + ءَ ≮ ١٨٠° لا حل له اصلا
  - ءَ > ٩٠°
    - حَ + ءَ > ١٨٠° له حلان
    - حَ + ءَ ≯ ١٨٠° له حل واحد مالم يكن حَ ≮ ءَ
    - حَ ≯ ءَ لا حل له اصلا
  - ءَ = ٩٠°
    - حَ > ءَ له حلان
    - حَ ≯ ءَ لا حل له اصلا

- ح < ٩٠°
  - ءَ < ٩٠°
    - حَ + ءَ > ١٨٠° له حلان
    - حَ + ءَ ≯ ١٨٠° له حل واحد مالم تكن حَ ≯ ءَ
    - حَ ≮ ءَ لا حل له اصلا
  - ءَ > ٩٠°
    - حَ > ءَ له حلان
    - حَ ≯ ءَ له حل واحد مالم يكن حَ + ءَ ≯ ١٨٠°
    - حَ + ءَ ≯ ١٨٠° لا حل له اصلا
  - ءَ = ٩٠°
    - حَ > ءَ له حلان
    - حَ ≯ ء لا حل له اصلا
- ح = ٩٠°
  - ءَ < ٩٠°
    - حَ > ءَ له حل واحد مالم يكن حَ + ءَ ≮ ١٨٠°
    - حَ ≯ ءَ لا حل له اصلا
    - حَ + ءَ ≮ ١٨٠° لا حل له اصلا
  - ءَ < ٩٠°
    - حَ > ءَ له حل واحد مالم يكن حَ + ءَ ≯ ١٨٠°
    - حَ ≮ ءَ لا حل له اصلا
    - حَ + ءَ ≯ ١٨٠° لا حل له اصلا
  - ءَ = ٩٠°
    - حَ = ٩٠° له طرق حل غير منتهية
    - حَ > و < ٩٠° لا حل له اصلا

(١٢١)

بمقتضى خاصية المثلث القطبى يمكن تطبيق الحواصل السابقة على المثلث المعلوم منه زاويتان ح و ء وضلع حَ وهذه هى الحالة الخامسة المتقدمة فى بند (١١٦) ويجب فقط تغيير حَ و ءَ و ح بحروف ءَ و ء و حَ وابدال علامة > بعلامة < وبالعكس فمتى وقعت المعاليم فى احد الاحوال التى ليس فيها الا حل واحد فالحسابات تبين حلين ولاجل ان يختار الحل الموافق يلزم ان نلاحظ ان الزوايا الكبرى تكون مقابلة للاضلاع الكبرى

وبالعكس فاذا فرضنا ان المعلوم ح = ١١٢° و ح = ١٠٢° و ءَ = ١٠٦° ففي الجدول السابق نعتبر من جميع الحالات المقابلة الى ح > ٩٠° الحالات التي فيها ءَ > ٩٠° ومن هذه الاخيرة نعتبر الحالة التي فيها ءَ ≮ ءَ وتلاحظ ايضا انه من حيث ان حَ + ءَ = ٢٨٠° يكون حَ + ءَ > ١٨٠° وينتج بمقتضى الجدول انه لا يوجد الا حل واحد وحيث ان ءَ > حَ تكون زاوية ء > ح ومنفرجة

عمليات حساب المثلثات الكروية

(١٢٢)

العملية الاولى

المطلوب تحويل زاوية الى الافق

حله

اذا فرضنا ان ءحه موضوعة في سطح مائل وحو الخط الرأسي المار من رأسها ح ثم رسمنا بالاختيار مستويا افقيا مـن يتلاقى مع الخطوط حء و حه و حو في نقط ز و ح و ط تكون زاوية زطح هي المسقط الافقي لزاوية ءحه وبعبارة اخرى تكون زاوية ءحه هي المحولة على الافق وزاوية زطح هي المطلوب ايجادها بفرض معرفة الزوايا ءحه و ءحو و هحو التي تقاس بالالة

ويسهل حل هذه العملية بالطريقة الرسمية ايضا وذلك لان خط حط حيث كان اختياريا يوجد من المعالم ما يكفي في رسم المثلثين القائمي الزاوية زحط وحط ثم في رسم مثلث زحح ثم في رسم مثلث زطح

ويسهل ايضا حساب زاوية زطح بواسطة الطريقة الرقمية لاننا لو رسمنا كرة من مركز ح بنصف قطر ما لعينت مستقيمات حء و حه و حو مثلثا كرويا ءهو اضلاعه معلومة الدرج بواسطة زوايا معلومة وزاوية ءوه التي فيه هي عين الزاوية المطلوبة زطح فقد ثبت ان حل المسئلة انما هو

بواسطة الحالة الاولى من احوال حل المثلثات الكروية المطلقة الفرض انظر بند (١١٢) اعنى انه يلزم لذلك الاستعانة بقانون

$$جا \frac{1}{2} ح = \sqrt{\frac{جا(م - دَ) جا(م - هَ)}{جا دَ جا هَ}}$$

والنفرض فيه ان حَ = ح د هـ و د = د ح و هَ = هـ ح و و

م = $\frac{1}{2}$(حَ + دَ + هَ) كما نفرض فيه ايضا ان

حَ = ٣٩ً ٤٥َ ٤٧° و دَ = ١٩ً ٤٩َ ٦٩° و هَ = ٣٦ً ١٧َ ٨٠°

فيحدث ٢م = ٣٤َ ٥٢ً ١٩٧° و م = ١٧َ ٥٦ً ٩٨°

و م — دَ = ٨ً ٦َ ٢٩° و م — هَ = ٨ً ٤١َ ١٨°

وهذه صورة الحسابات

لوجا (م — دَ) = ٩,٦٨٧١٥٥٢

لوجا (م — هَ) = ٩,٥٠٤٧٤١٢

لوَجا دَ = ٠,٠٢٧٥٠٧٨

لوَجا هَ = ٠,٠٠٦٢٦٢٣

٢لوجا $\frac{1}{2}$ ح = ١٩,٢٢٥٦٦٦٥

لوجا $\frac{1}{2}$ ح = ٩,٦١٢٨٣٣٢

$\frac{1}{2}$ ح = ٩,٢٧ً ١٢َ ٢٤°

ح = ٥٦ً ٢٤َ ٤٨°

(١٢٣)

العملية الثانية

اذا فرضنا ان طولى محلين من الكرة وعرضيهما معلومان والمطلوب معرفة البعد بين هذين المحلين

يفرض ان محلى ح و د هما المحلان المطلوب اجراء العملية عليهما ويفرض ان م ط خط الاستواء وان ف القطب الشمالى وان ف د هـ و ف و هـ خطا نصفى النهار المارّان بالمحلين المذكورين ح و د ثم يفرض ايضا

ان

ان الاطوال تعد من ابتدا نقطة ب فى جهة ب وز
ثم يقال ان فاضل طولى ب ز ب و يساوى قوس زو او زاوية ه
المحصورة بين خطى نصف النهار وان قوسى حه و ده تماما عرضى حو
و دز المعلومين فحينئذ يكون قد علم من المثلث الكروى حده الضلعان
المجاوران للزاوية ه وزاوية ه فيكون المطلوب حينئذ معرفة الضلع
الثالث حد وبمقتضى ما فى بند (١١٤) يكون ضلع حد او هَ
معينا من قانونى

ظتع = ظا دَ جتـه

جتـهَ = جادَ جا(حَ + ع) / جاع

فاذا فرضنا ان المطلوب معرفة المسافة بين مدينة ابريستة ومدينة كيانة من
مدن فرانسا يقال قد وجد فى دفتر ديوان الاطوال السنوى المصنوع
بالمملكة المذكورة فى سنة ١٨٢٨ مسيحية ان طول بريستة =
٩″ ٤٩′ ٦° وعرضها = ١٤″ ٢٣′ ٤٨° وطول كيانة = ٣٥′ ٥٤°
وعرضها = ١٥″ ٥٦′ ٤° وطولا هاتين البلدين غربيان ومعدودان من
مبدء نصف نهار باريس اما عرضاهما فشماليان فمن هذه المعالم يوجد اولا
ه = (٣٥′ ٥٤°) − (٤٩′ ٦°) = ٤٦′ ٤٧°
حَ = ٩٠° − (١٤″ ٢٣′ ٤٨°) = ٤٦″ ٣٦′ ٤١°
دَ = ٩٠° − (١٥″ ٥٦′ ٤°) = ٤٥″ ٣′ ٨٥°
ثم يبحث عن هَ هكذا

(حساب ضلع هَ)	(حساب الزاوية المساعدة ع)
لوجت ءَ = ٨،٩٣٤٨٤٦٨	لوجت هـ = ٩،٨٢٧٤٦٧١
لوجا (حَ + ع) = ٩،٨٧٧٣٦٢١	لوظا ءَ = ١١،٠٦٣٥٣٨٦
لوَجاع = ٠، ٨٩٤٥٦٤٢	
لوجت هَ = ٩،٧٠٦٧٧٣١	لوظت ع = ١٠،٨٩١٠٠٥٧
فيكون هَ = ٥٩° ٢٣َ ٥٤ً ،٣٨	فيكون ع = ٧٠° ١٩َ ٢٦ً
	وحَ + ع = ٤٨° ٥٦َ ١٢ً

فحينئذ يكون مقدار القوس الذى يقاس به البعد الذى من بريسته الى كيان ٥٩° ٢٣َ ٥٤ً ،٣٨ ولاجل تحويله الى الميرياميتر يلزم ان يتذكر ان ربع محيط دائرة نصف النهار الارضى = ١٠٠٠٠٠٠٠ ميتر اى ١٠٠٠ ميرياميتر فتنتج هذه المتناسبة

٩٠° : ٥٩° ٢٣َ ٥٤ً ،٣٨ :: ١٠٠٠ : س

وبتحويل الاقواس الى ثوانى يوجد

$$س = \frac{٢١٣٨٣٤،٣٨ \times ١٠٠٠}{٣٢٤٠٠٠} = ٦٥٩،٩٨٣ \text{ ميرياميتر}$$

وهذا التحويل الاخير يسهل اذا كان قوس هَ معينا بالدرج المايني لاننا اذا فرضنا على التقسيم الجديد ان قوسا = ٦٩ً ٤٥َ ٣٧° ثم نسبناه الى ربع المحيط فان مقداره يكون ٠،٣٧٤٥٦٩ فاذا ضرب هذا المقدار فى مقدار ربع المحيط بتحويله الى الميرياميتر يوجد بمجرد تغيير وضع الشرطة ٣٧٤،٥٦٩ ميرياميتر ولا حاجة الى تكثير الامثلة هنا ومن اراد ذلك فعليه بالكتب المخصوصة بعمليات علم المثلثات

الباب الرابع

فى بيان قوانين تستعمل فى الرياضيات العالية وفى تحويل الجيب وجيب التمام الى متسلسلات وفى حل المعادلة ذات الحدين والمعادلة بدرجة ثالثة

في الكلام على قانون المهندس موافر
وفيما يراد فيه من كلمة مضروب

(١٢٤)

القانون المنسوب للمهندس موافر الفرنساوي لكونه استكشفه هو

$$(\text{جته}+\sqrt{-1}\ \text{جاه})^{\text{ن}} = \text{جت ن ه}+\sqrt{-1}\ \text{جا ن ه} \quad (١)$$

وهو يدل على انه لاجل رفع كمية ذات حدين $\text{جته}+\sqrt{-1}\ \text{جاه}$ الى درجة ما يكفي ضرب قوس ه في اس هذه الدرجة ويمكن وضع علامة + او علامة − امام $\sqrt{-1}$ بالتسوية لان هذا يرجع الى تغيير ه بكمية −ه وانما يحتاج فيما يأتي الى صورة ما اذا كان الاس عددا صحيحا موجبا وهي التي نعتبرها اولا فنقول

بواسطة الضرب يوجد

$$(\text{جته}+\sqrt{-1}\ \text{جاه})(\text{جتو}+\sqrt{-1}\ \text{جاو}) = \text{جته جتو} - \text{جاه جاو}+\sqrt{-1}\ (\text{جاه جتو}+\text{جته جاو})$$

وحيث علم من القوانين السابقة في بند (٢٦) ان الجزء الحقيقي من هذا الحاصل $=\text{جت}\ (\text{ه}+\text{و})$ والجزء التخيلي $=\sqrt{-1}\ \text{جا}\ (\text{ه}+\text{و})$ يكون

$$(\text{جته}+\sqrt{-1}\ \text{جاه})(\text{جتو}+\sqrt{-1}\ \text{جاو}) =$$
$$= \text{جت}\ (\text{ه}+\text{و})+\sqrt{-1}\ \text{جا}\ (\text{ه}+\text{و})$$

يعني انه اذا ضربت كميتان في بعضهما صورة كل منهما $\text{جته}+\sqrt{-1}\ \text{جاه}$ يكون الحاصل كمية مشابهة لهما مركبة من قوسين مجموعين الى بعضهما ولاجل ضرب الحاصل في مضروب جديد صورته كالصورة المتقدمة يكفي جمع القوس الجديد الى الاثنين الاولين وهكذا يفعل ايا ما كان عدد المضاريب

فاذا فرض ان ن مضاريب متساوية $\text{جته}+\sqrt{-1}\ \text{جاه}$ حدث

$$(\text{جته}+\sqrt{-1}\ \text{جاه})^{\text{ن}} = \text{جت ن ه}+\sqrt{-1}\ \text{جا ن ه} \quad (١)$$

ولنعتبر الحالة التى يكون فيها الاس كسرا فبوضع هـ/ن بدل هـ
ينتج من قانون (١)

(جتا هـ/ن + √‾-١ جا هـ/ن)^ن = جتا هـ + √‾-١ جا هـ

واذا اخذ الجذر المبين بدرجة ن ووضع اس كسرى بدل علامة الجذر
ثبت قانون (١) لاس ١/ن لانه يحدث

(جتا هـ + √‾-١ جا هـ)^(١/ن) = (جتا هـ/ن + √‾-١ جا هـ/ن) (٢)

وعلى العموم مقدار ح^(م/ن) يدل على انه يلزم رفع ح الى درجة م واخذ جذر الحاصل المبين بدرجة ن وينتج من ذلك انه اذا رفع جتا هـ + √‾-١ جا هـ كما فى قانون (١) الى اس م واخذ الجذر المبين بدرجة ن كما فى قانون (٢) حدث

(جتا هـ + √‾-١ جا هـ)^(م/ن) = جتا م هـ/ن + √‾-١ جا م هـ/ن (٣)

وهذا القانون عين قانون (١) الذى غير فيه ن بكسر ما موجب م/ن
واخيرا اذا كان الاس سالبا نلاحظ ان

(جتا ن هـ + √‾-١ جا ن هـ) (جتا ن هـ − √‾-١ جا ن هـ) =
= جتا² ن هـ + جا² ن هـ = ١ ومنها ينتج

١ / (جتا ن هـ + √‾-١ جا ن هـ) = جتا ن هـ − √‾-١ جا ن هـ

او هذه المعادلة

(جتا هـ + √‾-١ جا هـ)^(−ن) = جتا(−ن هـ) + √‾-١ جا(−ن هـ) (٤)

وهذه عين التى قبلها وحينئذ فقانون (١) يكون حقيقيا سواء كانت كمية ن مقدارا موجبا او سالبا
وقد تركنا الحالة التى فيها الاس عددا جذريا لانه لا فائدة فيها ما لم يبدل ذلك باعداد نهائية فانه يقل اختلافها عنها بقدر ما يراد واما الاسوس التخيلية فلا يمكن تفسيرها بطريقة ما

قانون (أ) وان كان سم لا لطيفا فيه خلل عظيم جدا اذا كان الاس كسرا وذلك ان الطرف الاول منه حيث كان مكافيا الجذر يلزم ان تكون له جملة مقادير مع ان الطرف الثاني ليس له الا مقدار واحد ولنذكر مسائل الغرض منها تصحيح هذا الخلل فنقول

لنرجع الى قانون (٢) الذي فيه كمية ن عدد صحيح موجب وبمقتضى القواعد الجبرية يلزم ان يكون للطرف الاول المكافي $\sqrt[\text{ن}]{\text{جت هـ} + \sqrt{-1}\ \text{جا هـ}}$ مقادير مختلفة عددها ن ولاجل ان تنتج جميع المقادير المذكورة من الطرف الثاني نبرهن على انه يكفي استعواض هـ بجميع الاقواس التي جيوبها وجيوب تماماتها مثل هـ

ثم ان مقدار الاقواس العمومي هو (هـ+كط) بالرمز الى محيط الدائرة بحرف ط والى اى عدد صحيح موجبا او سالبا بحرف ك فبوضع هـ+كط بدل هـ يكون الطرف الثاني من قانون (٢) هكذا

$$\text{جت}\,\frac{\text{هـ}+\text{ك}\text{ط}}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\ \text{جا}\,\frac{\text{هـ}+\text{ك}\text{ط}}{\text{ن}} \qquad (٥)$$

وفي هذه الحالة نقول ان مقادير هذا الطرف عين مقادير الطرف الاول لانه يقال

اولا حيث ان كمية ن عدد صحيح يظهر لنا بمقتضى قانون (١) انه اذا رفع الطرف الثاني الى درجة ن يلزم ان يرجع الى $\text{جت هـ} + \sqrt{-1}\ \text{جا هـ}$

وثانيا اذا فرض بالتوالي ان كمية ك=٠ و ك=١ و ك=٢ ..... ك = ن−١ توجد مقادير مختلفة عددها ن

لانه اذا فرض في مقداري

$$\text{جت}\,\frac{\text{هـ}+\text{ك}'\text{ط}}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\ \text{جا}\,\frac{\text{هـ}+\text{ك}'\text{ط}}{\text{ن}} \quad \text{و}$$

$$\text{جت}\,\frac{\text{هـ}+\text{ك}''\text{ط}}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\ \text{جا}\,\frac{\text{هـ}+\text{ك}''\text{ط}}{\text{ن}}$$

من المقادير المتقدمة ان ح و ء عددان صحيحان < ن يلزم لاجل تساوى هذين المقدارين تساوى الاجزآء الحقيقية بعضها والاجزآء التخيلية كذلك

فيكون فاضل قوسى $\frac{هـ + ح ط}{ن}$ و $\frac{هـ + ء ط}{ن}$

مساويا لمحيط دآئرة اوعدة محيطان دوآئر وهذا الفاضل الذى هو $\frac{(ح - ء) ط}{ن}$

اقل من ط بناء على ان ح و ء اصغر من ن

وثالثا اذا جعلنا الكمية ك مقادير غير ٠ و ١ و ٢ ....

ن - ١ لا يوجد مقادير جديدة لان جميع الاعداد الصحيحة المغايرة للمذكورة موجبة كانت اوسالبة يمكن بيانها بقانون ن ل + ن بفرض ان ل عدد صحيح موجبا كان اوسالبا و نَ عدد صحيح موجب اصغر من ن فاذا فرض ك = ن ل + نَ صار قانون (٥) هكذا

$$\text{جت}\left(ل ط + \frac{هـ + نَ ط}{ن}\right) + \sqrt{-1}\ \text{جا}\left(ل ط + \frac{هـ + نَ ط}{ن}\right)$$

وبحذف الدوآئر غير اللازمة يحدث

$$\text{جت}\ \frac{هـ + نَ ط}{ن} + \sqrt{-1}\ \text{جا}\left(\frac{هـ + نَ ط}{ن}\right)$$

وحيث ان نَ عدد موجب < ن يكون المقدار السابق محصورا بين المقادير التى وجدت بفرض ك = ٠ و ك = ١ و ك = ٢ .... ك = ن - ١

وبهذه المشابهة يحصل للطرف الثانى من قانون (٢) ما يلزم من العموم اذا اخذ فيه قوس هـ بعينه مع اقواس هـ + ط و هـ + ٢ ط و هـ + ٣ ط .... هـ + (ن - ١) ط ويجب ان يجرى فى قانون (٣) ما ذكر فيقال قد وجد هذا القانون برفع

جتهـ + $\sqrt{-1}$ جاهـ الى درجة م ويأخذ جذر الحاصل المبين بدرجة ن وقانون (١) المتعلق بالحالة التى فيها الاس عدد صحيح موجب يفيد اولا

$$(\text{جتهـ} + \sqrt{-1}\ \text{جاهـ})^{\text{م}} = \text{جتمهـ} + \sqrt{-1}\ \text{جامهـ}$$

وقانون (٢) باخذ جذر الحاصل المبين بدرجة ن يفيد ثانيا

$$(\text{جتهـ} + \sqrt{-1}\ \text{جاهـ})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \text{جت}\,\frac{\text{مهـ}}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\ \text{جا}\,\frac{\text{مهـ}}{\text{ن}}$$

لكن لاجل ان يكون للطرف الثانى شمول كالاول يلزم بمقتضى ما وضح سابقا وضع مهـ + ٢كط بدل مهـ اووضع الاقواس مهـ و مهـ+ط و مهـ+٢ط و مهـ+٣ط .... مهـ+(ن−١)ط بدل هـ بالتوالى

ولنذكر بعض توضيحات فيما اذا اريد استعمال قانون (٣) فى اخذ جذر جتهـ + $\sqrt{-1}$ جاهـ المبين بدرجة ن ورفع هذا الجذر الى اس م فنقول اذا كان كسر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ غير قابل للاختصار وكان كل من حديه عددا اوليا مع الآخر امكن استعمال هذا القانون على حاله لانه متى كان عددا م و ن اولين مع بعضهما ثبت بالجبران

$(\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}})^{\text{م}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ واذا كان كسر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ قابلا للاختصار وكانت غاية اختصاره كسر $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ثبت ايضا ان $(\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}})^{\text{م}} = \sqrt[\text{ص}]{\text{ح}^{\text{س}}} = \text{ح}^{\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$

فحينئذ لاستعمال قانون (٣) يلزم قبل استعماله ان يحول كسر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ الى اصغر حديه بان يكتب هكذا

$$(\text{جتهـ} + \sqrt{-1}\ \text{جاهـ})^{\frac{\text{س}}{\text{ص}}} = \text{جت}\,\frac{\text{سهـ}}{\text{ص}} + \sqrt{-1}\ \text{جا}\,\frac{\text{سهـ}}{\text{ص}}$$

واذا ابقى $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ فى القانون المذكور كان الطرف الاول مكافيا لجذر درجته ن فتكون له مقادير مختلفة بعدة ن مع انه لا يلزم ان يكون له مقادير

مختلفة الابعدة ص ولا حاجة الى ذكر انه يلزم ملاحظة $+\text{ك ط}$ بعد
سه كما تقدم نظير ذلك

(١٢٦)

اذا كان عددا م و ن اولين يوجد $\left(\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}}\right)^{\text{م}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}}$ وهذا يرجع
الى ان اخذ الجذر والرفع الى الدرجة يمكن اجراؤهما فى اى ترتيب كان
فاذا اخذنا اولا جذر $\text{جتا هـ} + \sqrt{-1}\,\text{جا هـ}$ المبين بدرجة ن بمقتضى
قانون (٢) ثم رفعناه الى درجة م بمقتضى قانون (١) نجد

$$\left(\sqrt[\text{ن}]{\text{جتا هـ} + \sqrt{-1}\,\text{جا هـ}}\right)^{\text{م}} = \text{جتا}\frac{\text{م هـ}}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\,\text{جا}\frac{\text{م هـ}}{\text{ن}}$$

وحينئذ يلزم ان يلاحظ ان فى الطرف الثانى $\text{هـ} + \text{ك ط}$
وبالعكس اى اذا ابتدأ برفع $\text{جتا هـ} + \sqrt{-1}\,\text{جا هـ}$ الى درجة م
بواسطة قانون (١) ثم اخذ الجذر المدلول عليه بدرجة ن بواسطة قانون
(٢) يحدث

$$\sqrt[\text{ن}]{\left(\text{جتا هـ} + \sqrt{-1}\,\text{جا هـ}\right)^{\text{م}}} = \text{جتا}\frac{\text{م هـ}}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\,\text{جا}\frac{\text{م هـ}}{\text{ن}}$$

ويلزم فى هذا القانون ان يوضع $\text{م هـ} + \text{ك ط}$ بدل م هـ فمن ذلك يحدث
نتيجة ضرورية هى ان هاتين المعادلتين

$$\text{جتا}\frac{\text{م}(\text{هـ}+\text{ك ط})}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\,\text{جا}\frac{\text{م}(\text{هـ}+\text{ك ط})}{\text{ن}} \quad \text{و}$$

$$\text{جتا}\frac{\text{م هـ}+\text{ك ط}}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\,\text{جا}\frac{\text{م هـ}+\text{ك ط}}{\text{ن}}$$

اللتين فيهما ك عدد صحيح يجب ان تكونا متكافئتين تكافيا تاما متى كان
م و ن عددين اولين وبالجملة فذلك يعلم بدون واسطة بمجرد وضع
$\text{ك}=1$ و $\text{ك}=2$ و $\text{ك}=3 \cdots\cdots \text{ك} = (\text{ن}-1)$ على

التوالى و بالبرهنة على انه اذا قسم م و ٢م و ٣م ٠٠٠٠٠٠ (ن ــ ١) م على ن تكون الفواضل التى توجد مختلفة

(١٢٧)

ماقدمناه يدل على ما يلزم من الاحتراسات فى استعمال قانون المعلم مواور والعادة انه اذا كان الاس فيه عددا مركبا من كسر وصحيح كهذا م/ن يفرض لاجل السهولة ان م و ن عددان اوليان وفى هذه الحالة لا ينبغى ان يهمل اعتباران هـ او م هـ يلزم ان يزدادا بمضاريب مختلفة من المحيطات وهذه الملحوظة لازمة خصوصا فى قطرى المسئلة المعروفة بالقطاعات المنزوية قال المؤلف بوانسون بعض المؤلفين لعدم التفاتهم اليها لم يتبصروا فى بعض اشكالات وجدت فى هذا الفرع من الهندسة التحليلية والذين استخرجوا هذه الاشكالات لم يمكنهم حلها انتهى

فى قوانين تعيين جا ن هـ و جت ن هـ و (جا هـ)^ن (جت هـ)^ن

(١٢٨)

ولنرجع الى قانون مواور السابق فى بند (١٢٤) وهو

جت ن هـ + √ــ ١ جا ن هـ = (جت هـ + √ــ ١ جا هـ)^ن (١)

فاذا فرض فى هذا القانون ان ن عدد صحيح موجب فبوضع ــ هـ بدل هـ فيه يصير

جت ن هـ ــ √ــ ١ جا ن هـ = (جت هـ ــ √ــ ١ جا هـ)^ن (٢)

ويجمع هذه المعادلة الى سابقتها ثم طرحها منها يوجد هذان المقداران

جت ن هـ = [(جت هـ + √ــ ١ جا هـ)^ن + (جت هـ ــ √ــ ١ جا هـ)^ن] / ٢ (٣)

جا ن هـ = [(جت هـ + √ــ ١ جا هـ)^ن ــ (جت هـ ــ √ــ ١ جا هـ)^ن] / ٢ √ــ ١ (٤)

(١٢٩)

ويمكن اجراء قانون ذات الحدين على الدرجات وبحذف الحدود التى تتماحى يوجد

$$\text{جت ن هـ} = (\text{جت هـ})^{\text{ن}} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{١\times٢}(\text{جت هـ})^{\text{ن}-٢}(\text{جا هـ})^{٢} +$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)(\text{ن}-٣)}{١\times٢\times٣\times٤}(\text{جت هـ})^{\text{ن}-٤}(\text{جا هـ})^{٤} - \ldots \text{الخ} \quad (٥)$$

$$\text{جا ن هـ} = \frac{\text{ن}}{١}(\text{جت هـ})^{\text{ن}-١}\,\text{جا هـ} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)}{١\times٢\times٣}$$

$$(\text{جت هـ})^{\text{ن}-٣}(\text{جا هـ})^{٣} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)(\text{ن}-٣)(\text{ن}-٤)}{١\times٢\times٣\times٤\times٥}$$

$$(\text{جت هـ})^{\text{ن}-٥}(\text{جا هـ})^{٥} - \ldots\ldots\ldots \text{الخ} \quad (٦)$$

وهذان القانونان يبينان جيب مضروب ن هـ وجيب تمامه بمعرفة جيب تمام القوس الاصلى وجيبه وقوانين الحدود الاصلية ظاهرة فيه ويلزم ان تمتد الى ان يساوى الحد الاخير صفرا كما فى القانون الذى هى مأخوذة منه ويمكن الوصول الى هذين القانونين بواسطة معادلة (١) لان مسطح الطرف الثانى يشتمل على جزء حقيقى وجزء يعتريه $\sqrt{-١}$ ولاجل ابقاء المعادلة على حالها يلزم ان تكون الاجزاء الحقيقية فى الطرفين متساوية والاجزاء التخيلية كذلك وبهذه الكيفية يوجد القانونان السابقان

(١٣٠)

كثيرا ما يحتاج فى العمليات الرياضية العالية الى تعيين $(\text{جا هـ})^{\text{ن}}$ و $(\text{جت هـ})^{\text{ن}}$ بمعرفة جيوب وجيوب تمام الاقواس التى هى مضاريب وكيفية الوصول الى ذلك حين يكون ن عددا صحيحا موجبا وهى الحالة المعتادة ان يوضع

$\text{جت هـ} + \sqrt{-١}\,\text{جا هـ} = \text{ص}$ و $\text{جت هـ} - \sqrt{-١}\,\text{جا هـ} = \text{س}$ فيحدث

$٢\,\text{جت هـ} = \text{س} + \text{ص}$ و $٢\sqrt{-١}\,\text{جا هـ} = \text{ص} - \text{س}$

فيكون $٢^{\text{ن}}(\text{جت هـ})^{\text{ن}} = (\text{س}+\text{ص})^{\text{ن}}$ و $(٢\sqrt{-١})^{\text{ن}}(\text{جا هـ})^{\text{ن}}$
$= (\text{ص}-\text{س})^{\text{ن}}$ وبتسطيح القوى يكون

$$2^{ن}(جتـهـ)^{ن} = صـ^{ن} + \frac{ن}{1} صـ^{ن-1} سـ + \frac{ن(ن-1)}{1\times2} صـ^{ن-2} سـ^{2} + الخ \quad (7)$$

$$(2\sqrt{-1})^{ن}(جاهـ)^{ن} = صـ^{ن} - \frac{ن}{1} صـ^{ن-1} سـ + \frac{ن(ن-1)}{1\times2} صـ^{ن-2} سـ^{2} - الخ \quad (8)$$

والنستعمل قانون (٧) حالا فنفرض اولا ان ن عدد فرد (٢م+١) ومن المعلوم كما هو مقرر فى الجبر ان الحدود المتساوية الابعاد من الطرفين لهما مكررات متساوية وان عدد حدود القانون ٢م+٢ وبهذه التنبيهات يشاهد بسهولة انا اذا قلبنا النصف الثانى من الحدود وكتبناه فوق الاول يحدث

$$2^{ن}(جتـهـ)^{ن} = صـ^{ن} + \frac{ن}{1} صـ^{ن-1} سـ \ldots\ldots\ldots + \frac{ن(ن-1)(ن-2)\ldots(م+2)}{1\times2\times3\times4\ldots م}$$

$$سـ^{ن} + صـ^{ن-1}سـ^{م} + \frac{ن}{1} صـ^{ن-1} سـ \ldots\ldots\ldots + \frac{ن(ن-1)(ن-2)\ldots(م+2)}{1\times2\times3\times4\ldots م} صـ^{م} سـ^{م+1}$$

او يحدث

$$2^{ن}(جتـهـ)^{ن} = (سـ^{ن} + صـ^{ن}) + \frac{ن}{1} سـ صـ (صـ^{ن-2} + سـ^{ن-2}) +$$

$$\frac{ن(ن-1)}{1\times2} سـ^{2}صـ^{2}(صـ^{ن-4} + سـ^{ن-4}) +$$

$$\frac{ن(ن-1)(ن-2)\ldots(م+2)}{1\times2\times3\ldots م} سـ^{م}صـ^{م}(سـ + صـ)$$

وهذا عين الذى قبله غير ان قانون مواور يفيد على العموم ان

$$صـ^{ك} + سـ^{ك} = (جتـهـ + \sqrt{-1}\,جاهـ)^{ك} + (جتـهـ - \sqrt{-1}\,جاهـ)^{ك} =$$

$$جتـكـهـ + \sqrt{-1}\,جاكـهـ + جتـكـهـ - \sqrt{-1}\,جاكـهـ = 2\,جتـكـهـ$$

وايضا ان اسوس حاصل صـ سـ تساوى ١
لانه يوجد.

$$\text{ص}\,\text{س}=(\text{جت}\,\text{هـ}+\sqrt{-1}\ \text{جا}\,\text{هـ})\ (\text{جت}\,\text{هـ}-\sqrt{-1}\ \text{جا}\,\text{هـ})=$$
$$\text{جت}^{2}\text{هـ}+\text{جا}^{2}\text{هـ}=1$$

وبالبناء على هذه التنبيهات يختصر مقدار $\frac{\text{ن}}{2}(\text{جت}\,\text{هـ})^{\text{ن}}$ فبتقسيم الحدود كلها على ٢ يحدث

$$2^{\text{ن}-1}(\text{جت}\,\text{هـ})^{\text{ن}}=\text{جت}\,\text{ن}\,\text{هـ}+\frac{\text{ن}}{1}\text{جت}(\text{ن}-2)\text{هـ}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times2}$$
$$\text{جت}(\text{ن}-4)\text{هـ}\cdots+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{م}+2)}{1\times2\times3\cdots\text{م}}\text{جت}\,\text{هـ}\quad(9)$$

ونفرض ثانيا ان كمية ن عدد زوج مثل ٢م فيكون عدد حدود قانون (٧) ٢م+١ واذا حللنا الحد المتوسط الى جزءين كل منهما يساوى نصف الحد المذكور يوجد باختصار كالسابق

$$2^{\text{ن}-1}(\text{جت}\,\text{هـ})^{\text{ن}}=\text{جت}\,\text{ن}\,\text{هـ}+\frac{\text{ن}}{1}\text{جت}(\text{ن}-2)\text{هـ}+$$
$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times2}\text{جت}(\text{ن}-4)\text{هـ}\cdots\cdots+$$
$$+\frac{1}{2}\ \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{م}+1)}{1\times2\times3\cdots\text{م}}\quad(10)$$

ولنعتبر الآن قانون (٨) فتكون الحدود معتراة على التناوب بعلامتى + و — بحيث انه اذا كان عدد ن فردا مثل ٢م+١ يكون للحدود المتساوية الابعاد من المتطرفة مكررات متساوية باشارات مختلفة وينبنى على ذلك انه بالبرهنة على ما هنا كما تقدم فى مثل هذه الصورة من قانون (٧) يوجد بسهولة

$$(٢\sqrt{-١})^{٢م+١}(\text{جاهـ})^{٢م+١} = ص^{ن} - س^{ن} + \frac{ن}{١}\,س\,ص\left(ص^{ن-٢} - س^{ن-٢}\right) + \frac{ن(ن-١)}{١\times٢}\,ص^{٢}س^{٢}\left(ص^{ن-٤} - س^{ن-٤}\right) \cdots\cdots +$$

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)\cdots\cdots(م+٢)}{١\times٢\times٣\cdots\cdots\cdots م}\,ص^{م}س^{م}(ص-س)$$

والعمل الاختصار يلاحظ ان $ص\,س = ١$ كما يلاحظ ايضا على العموم ان $ص^{ك} - س^{ك} = \sqrt{-١}\ \text{جاكهـ}$ وحينئذ يكون الطرفان قابلان للقسمة على $٢\sqrt{-١}$ ويبقى $(٢\sqrt{-١})^{٢م}(\text{جاهـ})^{٢م+١}$

$$= \text{جا}\,ن\,\text{هـ} + \frac{ن}{١}\,\text{جا}(ن-٢)\text{هـ} + \frac{ن(ن-١)}{١\times٢}\,\text{جا}(ن-٤)\text{هـ} \cdots +$$

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)\cdots\cdots(م+٢)}{١\times٢\times٣\cdots\cdots\cdots م}\,\text{جاهـ} \qquad (١١)$$

واذا كان عدد ن زوجا مثل ٢م كان للحدود المتساوية الابعاد من الحدود المتطرفة فى قانون (٨) مكررات متساوية باشارات كذلك وبالبرهنة هنا كما تقدم فى الحالة المناسبة لما هنا من قانون (٧) يوجد بالسهولة

$$(٢\sqrt{-١})^{٢م}(\text{جاهـ})^{٢م} = \text{جت}\,ن\,\text{هـ} - \frac{ن}{١}\,\text{جت}(ن-٢)\text{هـ} + \frac{ن(ن-١)}{١\times٢}\,\text{جت}(ن-٤)\text{هـ} \cdots\cdots\cdots \pm$$

$$\frac{١}{٢}\,\frac{ن(ن-١)(ن-٢)\cdots\cdots\cdots(م+١)}{١\times٢\times٣\cdots\cdots\cdots} \qquad (١٢)$$

فالقوانين (٩) و (١٠) و (١١) و (١٢) هى التى كان مرادنا ايجادها فانها نافعين على تحويل اسوس جيب اوجيب تمام الى جملة حدود يشتمل كل منهما على الدرجة الاولى فقط لجيب قوس مضعف عدة مرات

وجيب تمامه ولابد ان يلاحظ فى القانونين الاخيرين ان الحد التخيلى الذى هو $\sqrt{-1}$ اذا رفع الى اس زوج افاد مضروبا حقيقيا يساوى $+1$ او -1 بحسب كون م عددا زوجا او فردا ويلزم ان ننبه ايضا لاجل تسهيل الحسابات على اننا اذا اتبعنا القاعدة المبينة فى الحدود الاول يجب ان نقف اذا اوجدنا قوسا سالبا ما لتفتين الى ان لا نأخذ الا نصف الحد الاخير اذا اشتمل على قوس يساوى صفرا

تحويل الجيب وجيب التمام الى متسلسلات

(١٣١)

ولنذكر كيفية استخراج المهندس اولير للمتسلسلات المبينة للجيب وجيب التمام بواسطة معرفة القوس من قانونى (٥) و (٦) السابقين فى بند (١٢٩) فنقول يمكن التصرف فى هـ بحيث يكون ن هـ مساويا قوسا ما س بابقاء ن عددا صحيحا فيمكن ان يوضع حينئذ ن هـ $=$ س فيحدث ن $= \frac{\text{س}}{\text{هـ}}$

وحينئذ يمكن كتابة قانونى (٥) و (٦) هكذا

$$\text{جتس} = (\text{جت هـ})^{\text{ن}} - \text{س}\frac{(\text{س}-\text{هـ})}{1\times2}(\text{جت هـ})^{\text{ن}-2}\left(\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}\right)^{2} + \frac{\text{س}(\text{س}-\text{هـ})(\text{س}-2\text{هـ})(\text{س}-3\text{هـ})}{1\times2\times3\times4}(\text{جت هـ})^{\text{ن}-4}\left(\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}\right)^{4} - \text{الخ} \quad (1)$$

$$\text{جاس} = \frac{\text{س}}{1}(\text{جت هـ})^{\text{ن}-1}\left(\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}\right) - \frac{\text{س}(\text{س}-\text{هـ})(\text{س}-2\text{هـ})}{1\times2\times3}(\text{جت هـ})^{\text{ن}-3}\left(\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}\right)^{3}$$

$$+\,\text{س}\frac{(\text{س}-\text{هـ})(\text{س}-2\text{هـ})(\text{س}-3\text{هـ})(\text{س}-4\text{هـ})}{1\times2\times3\times4\times5}(\text{جت هـ})^{\text{ن}-5}\left(\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}\right)^{5} - \text{الخ} \quad (2)$$

فاذا توهمنا ان $ه$ يتناقص على التوالى الى ان يصير صفرا لزم ان عدد $ن$ يزداد الى غير نهاية وحينئذ لا يبقى فى القانونين السابقين لا $ه$ ولا $ن$ بل لا يوجد فيهما الا قوس $س$ وهذا ما يقع للقانونين اللذين يكون المقصود منهما تبيين جيب قوس وجيب تمامه بمعرفة ذلك القوس فحين يصير $ه$ صفرا يحدث جت $ه = ١$ وايضا $\frac{جاه}{ه} = ١$ كما فى (٥١) ولنفرض ان اسوس جت $ه$ و $\frac{جاه}{ه} = ١$ بالغة ما بلغت الاسوس فى العظم فيصير القانونان السابقان هكذا

$$جت س = ١ - \frac{س^٢}{١×٢} + \frac{س^٤}{١×٢×٣×٤} - \frac{س^٦}{١×٢×٣×٤×٥×٦}$$

$$+ \text{ الخ } (٣)$$

$$جاس = س - \frac{س^٣}{١×٢×٣} + \frac{س^٥}{١×٢×٣×٤×٥} -$$

$$\frac{س^٧}{١×٢×٣×٤×٥×٦×٧} + \text{ الخ } (٤)$$

وحيث ان عدد $ن$ صار لا نهائيا لا تنتهى حدود المتسلسلات لكنها قابلة لان تفيد مقادير الجيب وجيب التمام تقريبا خصوصا اذا كان قوس $س$ كسرا صغيرا جدا وهذه الحالة هى التى يستعملها المهندسون

(١٣٢)

ومن البديهى الظاهر من اول وهلة ان جميع اسوس جت $ه$ و $\frac{جاه}{ه}$ يجب ان تفيد الواحد حين يتناقص $ه$ حتى يصير صفرا كما فرضناه ولكن اذا تأمل ادنى تأمل يشاهد هنا اشكال ينبغى الالتفات الى حله ولاجل تسهيل فهمه نعتبر الاشياء على بعد

فنفرض ان ص و س فی مقدار $\frac{س}{ص}$ كميتان متغيرتان لا تعلق لاحدهما بالاخرى فاذا جعل س مقدارا موجبا ثابتا وزيد مقدار ص من صفر الى واحد بالتدريج تزداد كمية $\frac{س}{ص}$ ايضا من صفر الى واحد واذا فرض ان ص ثابتة الا انها < ١ وان س ذات مقادير عظيمة جدا تكون كمية $\frac{س}{ص}$ صغيرة جدا وحدها المقابل لمعادلة ص = + لا يكون صفرا

ولنفرض الآن ان ص يزداد من صفر الى واحد وقت ان يفرض ازدياد س ايضا الى + لا فاذا لم يوجد ادنى نسبة بين ص و س يمكن ان يتوهم دائما ان بين هاتين الكميتين المتغيرتين ارتباط بحيث تكون نهاية س المقابلة لمقدار ص = ١ و س = + لا اما صفرا او واحدا او كمية غيرهما محصورة بين صفر والواحد بمعنى ان س تكون ذات مقادير غير منتهية حقيقة

لكن اذا كان الامر بعكس ذلك بان كان لكل من س و ص المتغيرتين تعلق ببعضهما يفرض مثلا ان المتغيرتين دالة كمية واحدة صغيرة ط وكمية ط هي التي تجعل ص تزداد الى الواحد كما تجعل س تزداد الى + لا فيلزم حينئذ الالتفات الى كيفية توازن الازدياد الذي يميل ازدياد ص لان يحدثه في مقدار $\frac{س}{ص}$ مع التناقص الذي يميل ازدياد س لان يحدثه فيه او يقال ان اللازم اقل ما فيه معرفة الحد الذي يميل اليه مقدار $\frac{س}{ص}$ على حسب تركيب ص و س لدلالة ط فهذا هو الاشكال الذي يحصل في الانتقال من قانون (١) و (٢) الى المتسلسلتين (٣) و (٤)

والمتغيرتان هنا هما هـ و ن المرتبطتان ببعضهما بنسبة ن هـ = س التي تستلزم ان حاصل الضرب ن هـ يكون دائما مساويا لقوس ما معلوم س بحيث كان قانونا (١) و (٢) يشتملان على مقادير

(جتا هـ)^ن و (جتا هـ)^(ن−١) . . . . التي يلزم ان يفرض فيها كلها

$ه = ٠$ و $ص = +$ لا لايظهران نهايات هذه المقادير هي الواحد

وايضا تشتمل المتسلسلات نفسها على الاسوس التصاعدية لنسبة $\frac{جاه}{ه}$

وحين تكون عددا لانهائيا تكون المتسلسلات حدودا لانهائية فيمكن

ان تزداد اسوس هذه النسبة الى غير نهاية ويرجع الاشكال بعينه فلنذكر

بعض توضيحات يظهران لاغبار عليها فنقول

يرجع الى قانونى (١) و(٢) ولاجل الاختصار يوضع

$$ف = (جت ه)^{ن - م} \left(\frac{جاه}{ه}\right)^{م}$$

فيكتب الحد العمومي لكل من هذين القانونين هكذا

$$\pm \frac{س}{١} \left(\frac{س}{٢} - \frac{ه}{٢}\right) \left(\frac{س}{٣}\right) - \frac{ه^٢}{٢} \left(\frac{س}{م}\right) - \frac{(م-١) ه}{م} \right) ف$$

بفرض ان م عدد زوج فى قانون (١) وعدد فرد فى قانون (٢) ولنفرض

ان $ه = ٠$ ثم نرمز بحرف و الى مايصير ف فيكون الحد

العمومي

$$\pm \frac{و \, س^{م}}{١ \times ٢ \times ٣ \cdots م}$$

فحينئذ تكون و هى التى يلزم تعيينها وحيث فرضنا ان ه اقل من ربع

محيط دائرة وهذا جائز حيث فرض $ه = ٠$ يحدث $ه < ظاه$

وعلى مقتضى ذلك يكون $ف > (جت ه)^{ن}$ لكن $جت ه = \sqrt{١ - جا^٢ ه}$

فيكون $جت ه > \sqrt{١ - ه^٢}$ فحينئذ يكون

$$ف > \sqrt{(١ - ه^٢)^{ن}}$$

وبتسطيح اس ٢ن والالتفات الى كون $ن ه = س$ يحدث

$$(\text{١} - \text{هـ}^{2})^{\text{٢ن}} = \text{١} - \frac{\text{٢ن}}{\text{١}}\,\text{هـ}^{2} + \frac{\text{٢ن}(\text{٢ن} - \text{١})}{\text{١}\times\text{٢}}\,\text{هـ}^{4} -$$

$$\frac{\text{٢ن}\,(\text{٢ن} - \text{١})(\text{٢ن} - \text{٢})}{\text{١}\times\text{٢}\times\text{٣}}\,\text{هـ}^{6} + \text{الخ} = \text{١} - \frac{\text{٢س}}{\text{١}}\,\text{هـ} +$$

$$\frac{\text{٢س}}{\text{١}}\left(\frac{\text{٢س}}{\text{٢}} - \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}\right)\text{هـ}^{2} - \frac{\text{٢س}}{\text{١}}\left(\frac{\text{٢س}}{\text{٢}} - \frac{\text{هـ}}{\text{٢}}\right)\left(\frac{\text{٢س}}{\text{٣}} - \frac{\text{٢هـ}}{\text{٣}}\right)\text{هـ}^{3} + \text{الخ}$$

ولاجل الحصول على فرض هـ = ٠ يمكن ان يبتدء بفرض هـ صغيرة جدا فحينئذ يتضح ان حدود المتسلسلة السابقة تنقص بالتدريج وحيث كانت تارة موجبة وسالبة اخرى فاذا اقتصرنا على الحدين الاولين ينتج حاصل صغير جدا فيكون $(\text{١} - \text{هـ}^{2})^{\text{٢ن}} > \text{١} - \text{٢هـس}$ وبالضرورة يكون $\text{ف} > \sqrt{\text{١} - \text{٢هـس}}$

واذا فرضنا هـ = ٠ يصير هذا الجذر ١ ويصير ن حد و فكمية و لا يمكن ان تكون < ١ على ان دالة ف حيث كانت حاصل المضروبين اللذين لا يمكن ان يكونا > ١ لا يمكن ان يصير حد و > ١ ايضا فيكون و = ١ وحينئذ يكون الحد العمومى (٥) للمتسلسلات التى تبين جت س و جا س هكذا $\pm \frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{١}\times\text{٢}\times\text{٣} \cdots\cdots \text{م}}$

وبفرض م = ٠ و م = ٢ و م = ٤ وهكذا وبفرض م = ١ و م = ٣ و م = ٥ وهكذا مع الالتفات الى تغيير الاشارات يتوصل الى حدود متسلسلتى (٣) و (٤) المبرهن عليهما مع غاية الضبط

١٣٣

حل المعادلات ذات الحدين بواسطة الجداول ونظرية المهندس قوطس

اذا فرض ان المطلوب حل المعادلة ذات الحدين $\text{ص}^{\text{ن}} = \pm \text{ح}$ يرمز بحرف $\text{ح}^{\text{ع}}$ الى واحد من جذور ح التى عددها ن ويفرض ان ص = حَ س فتصير المعادلة ذات الحدين $\text{س}^{\text{ن}} = \pm \text{١}$

فنعتبر اولا الحالة الاولى منها التى هى

$$س^{ن} = +١ \qquad (١)$$

فاذا وضعنا $س = جتـ\ هـ + \sqrt{-١}\ جا\ هـ$ يحدث لنا من قانون موافر

$$س^{ن} = جتـ\ ن\ هـ + \sqrt{-١}\ جا\ ن\ هـ$$

وحينئذ فجميع مقادير هـ المعينة من هذه المتساوية

$$جتـ\ ن\ هـ \sqrt{-١}\ جا\ ن\ هـ = +١$$

تحدث مقادير س التى هى جذور معادلة (١) ويكفى فى الاستعمال الذى تستعمله هنا ان قانون موافر ثابت للاسوس الصحيحة الموجبة ولاجل التوفية بهذه المتساوية الاخيرة يلزم ان ينعدم الجزء التخيلى $\sqrt{-١}\ جا\ ن\ هـ$ فينتج من ذلك ان ن هـ احد مضاريب نصف محيط الدائرة ثم يلزم ان يفرض $جتـ\ ن\ هـ = ١$ وهذا يستلزم ان ن هـ احد المضاريب الزوجية لنصف المحيط فاذا رمزنا بحرف ط الى نصف محيط الدائرة والى اى عدد زوج بهذا الرمز ٢ك يلزم ان يحدث

$$ن\ هـ = ٢ك\ ط \quad \text{ومنه يوخذ} \quad هـ = \frac{٢ك\ ط}{ن}$$

وعليه ينبنى

$$س = جتـ \frac{٢ك\ ط}{ن} + \sqrt{-١}\ جا \frac{٢ك\ ط}{ن}$$

فاذا وضعنا فى كل المحال اشارة − امام $\sqrt{-١}$ لا يتغير البرهان وحينئذ تحدث جذور معادلة $س^{ن} = ١$ باخذ مقادير س المحصورة فى قانون

$$س = جتـ \frac{٢ك\ ط}{ن} \pm \sqrt{-١}\ جا \frac{٢ك\ ط}{ن} \qquad (أ)$$

فجذور معادلة (أ) عددها (ن) ومن المعلوم ان هذه الجذور كلها

$$(1-\text{هـ}^2)^{2\text{ن}} = 1 - \frac{2\text{ن}}{1}\text{هـ}^2 + \frac{2\text{ن}(2\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{هـ}^4 -$$

$$\frac{2\text{ن}(2\text{ن}-1)(2\text{ن}-2)}{1\times 2\times 3}\text{هـ}^6 + \text{الخ} = 1 - \frac{2\text{س}}{1}\text{هـ} +$$

$$\frac{2\text{س}}{1}\left(\frac{2\text{س}}{2}-\frac{\text{هـ}}{2}\right)\text{هـ}^2 - \frac{2\text{س}}{1}\left(\frac{2\text{س}}{2}-\frac{\text{هـ}}{2}\right)\left(\frac{2\text{س}}{3}-\frac{2\text{هـ}}{3}\right)\text{هـ}^3 + \text{الخ}$$

ولاجل الحصول على فرض هـ = ٠ يمكن ان يبتدء بفرض هـ صغيرة جدا فحينئذ يتضح ان حدود المتسلسلة السابقة تنقص بالتدريج وحيث كانت تارة موجبة وسالبة اخرى فاذا اقتصرنا على الحدين الاولين ينتج حاصل صغير جدا فيكون $(1-\text{هـ}^2)^{2\text{ن}} > 1 - 2\text{هـ س}$ وبالضرورة يكون

$\text{ف} > \sqrt{1 - 2\text{هـ س}}$

واذا فرضنا هـ = ٠ يصير هذا الجذر ١ ويصير ن حد و فكمية و لا يمكن ان تكون < ١ على ان دالة ف حيث كانت حاصل المضروبين اللذين لا يمكن ان يكونا > ١ لا يمكن ان يصير حد و > ١ ايضا فيكون و = ١ وحينئذ يكون الحد العمومي (٥) للمتسلسلات التي تبين جت س و جا س هكذا

$$\pm \frac{\text{س}^{\text{م}}}{1\times 2\times 3\cdots\text{م}}$$

وبفرض م = ٠ و م = ٢ و م = ٤ وهكذا وبفرض م = ١ و م = ٣ و م = ٥ وهكذا مع الالتفات الى تغيير الاشارات يتوصل الى حدود متسلسلتي (٣) و (٤) المبرهن عليهما مع غاية الضبط

١٣٣

حل المعادلات ذات الحدين بواسطة الجداول ونظرية المهندس قوطس

اذا فرض ان المطلوب حل المعادلة ذات الحدين $\text{ص}^{\text{ن}} = \pm \text{ح}$ يرمز بحرف $\overset{\text{ن}}{\text{ح}}$ الى واحد من جذور ح التي عددها ن ويفرض ان ص = $\overset{\text{ن}}{\text{ح}}$ س فتصير المعادلة ذات الحدين $\text{س}^{\text{ن}} = \pm 1$

فنعتبر اولا الحالة الاولى منها التى هى

$$\text{س}^{\text{ن}} = +١ \qquad (١)$$

فاذا وضعنا $\text{س} = \text{جت هـ} + \sqrt{-١}\ \text{جا هـ}$ يحدث لنا من قانون مواور

$$\text{س}^{\text{ن}} = \text{جت ن هـ} + \sqrt{-١}\ \text{جا ن هـ}$$

وحينئذ فجميع مقادير هـ المعينة من هذه المتساوية

$$\text{جت ن هـ}\ \sqrt{-١}\ \text{جا ن هـ} = +١$$

تحدث مقادير س التى هى جذور معادلة (١) ويكفى فى الاستعمال الذى تستعمله هنا ان قانون مواور ثابت للاسوس الصحيحة الموجبة ولاجل التوفية بهذه المتساوية الاخيرة يلزم ان ينعدم الجزء التخيلى $\sqrt{-١}\ \text{جا ن هـ}$ فينتج من ذلك ان ن هـ احد مضاريب نصف محيط الدائرة ثم يلزم ان يفرض $\text{جت ن هـ} = ١$ وهذا يستلزم ان ن هـ احد المضاريب الزوجية لنصف المحيط فاذا رمزنا بحرف ط الى نصف محيط الدائرة والى اى عدد زوج بهذا الرمز ٢ ك يلزم ان يحدث

$$\text{ن هـ} = ٢\text{ك ط} \quad \text{ومنه يوخذ} \quad \text{هـ} = \frac{٢\text{ك ط}}{\text{ن}}$$

وعليه ينبنى

$$\text{س} = \text{جت}\frac{٢\text{ك ط}}{\text{ن}} + \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{٢\text{ك ط}}{\text{ن}}$$

فاذا وضعنا فى كل الحال اشارة − امام $\sqrt{-١}$ لا يتغير البرهان وحينئذ تحدث جذور معادلة $\text{س}^{\text{ن}} = ١$ باخذ مقادير س المحصورة فى قانون

$$\text{س} = \text{جت}\frac{٢\text{ك ط}}{\text{ن}} \pm \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{٢\text{ك ط}}{\text{ن}} \qquad (\text{أ})$$

فجذور معادلة (١) عددها (ن) ومن المعلوم ان هذه الجذور كلها

غير متساوية وحيث كان يمكن في القانون السابق ان نجعل الكمية ى
جميع المقادير الصحيحة موجبة كانت او سالبة نبرهن على انه يمكن بهذه المثابة
معرفة مقادير مختلفة لمجهول س عددها ن ولا يمكن اكثر من ذلك
وهذه المقادير التي عددها ن تؤول الى جذور معادلة (١) التي
جذورها ن ايضا ولنبرهن على ما ذكر فنقول

اولا لا فائدة في اعطاء ك مقادير سالبة لانه بوضع ـ ك بدل ك يتغير
احد مقداري قانون (١) بالآخر

وثانيا لا فائدة ايضا في فرض ك = ن او > ن لانه يمكن ان يطرح
من ك اعظم مضاريب ن وذلك يرجع الى طرح محيط الدائرة مرة
او مرات من قوس $\frac{٢ ك ط}{ن}$ وذلك لا يغير الجيب ولا تمام الجيب

وثالثا اذا اعتبرنا بين ٠ و ن ان عددي كَ و ن ـ كَ على بعد واحد
من ٠ و ن تكون مقادير س المقابلة لهما متساوية لانه اذا فرض
ان ك = ن ـ كَ يحدث

$$س = جتا \frac{٢ (ن ـ كَ) ط}{ن} \pm \sqrt{ـ١}\ جا \frac{٢ (ن ـ كَ) ط}{ن}$$

$$س = جتا \frac{٢ كَ ط}{ن} \pm \sqrt{ـ١}\ جا \frac{٢ كَ ط}{ن}$$

$$= جتا \frac{٢ كَ ط}{ن} \mp \sqrt{ـ١}\ جا \frac{٢ كَ ط}{ن}$$

وهذه المقادير عين المقادير المقابلة ك = كَ فقد ثبت انه لا فائدة في جعل
مقادير > $\frac{١}{٢}$ ن لكمية ك وحينئذ لو فرضنا ن عددا فردا ٢ ل + ١ او عددا
زوجا ٢ ل ـ ١ يمكن ان يقتصر على جعل مقادير
ك = ٠ و ك = ١ و ك = ٢ ٠٠٠٠٠٠٠٠ ك = ل بدل ك
ولم يبق علينا الا البرهنة على ان قانون (١) يعطي جذور معادلة (١)

بالكيفية

بالكيفية السابقة وهذا ما نشرع فيه فنقول

لو كانت صورة المعادلة $س^{٢ل} = ١$ لصار قانون (١) هكذا

$$س = جت \frac{ك ط}{ل} \pm \sqrt{-١}\ جا \frac{ك ط}{ل}$$

فلاجل العددين المتطرفين $ك = ٠$ و $ك = ل$ يوجد $س = +١$ و $س = -١$ ولاجل الاعداد المتوسطة ١ ٢ ٣ ٠٠٠٠٠ ل-١ يوجد القوس منحصرا بين ٠ و ١٨٠° فحينئذ لا يصير الجيب المضروب فى $\sqrt{-١}$ صفرا وحينئذ تكون مقادير س تخيلية وما عدا ذلك يقال لاشئ من هذه المقادير الاخيرة يتكرر لان للجذر التخيلى $\sqrt{-١}$ اشارات مختلفة فى الجذرين الزوجين اللذين من جملة ازدواج واحد اعنى اللذين يحدثان من مقدار واحد ك والاجزاء الحقيقية تختلف فى الازدواجات الحاصلة من مقادير ك المختلفة نظرا لكونها جيوب تمام اقواس تتزايد من ٠° الى ١٨٠° فاذا جمعنا مقدارى +١ و -١ الحقيقيين الى هذه المقادير التخيلية التى عددها ٢ل -٢ يكون المجموع ٢ل وهو جذر معادلة $س^{٢ل} = ١$ كما يلزم ان يكون كذلك

اما لو كانت صورة معادلة (١) هكذا $س^{٢ل+١} = ١$ لصار قانون (١) هكذا

$$س = جت \frac{٢ ك ط}{٢ل+١} \pm \sqrt{-١}\ جا \frac{٢ ك ط}{٢ل+١}$$

وفى هذه الحالة لا يوجد الا جزء واحد حقيقى $س = +١$ يقابل $ك = ٠$ وما عداه من الجذور تخيلى على ان من الواضح ان عدد مجموع الجذور يساوى المعامل الذى هو ٢ل+١

ولنعتبر معادلة $س^{ن} = -١$ (٢)

فاذا وضعنا

$$س = جت ه \pm \sqrt{-١}\ جا ه$$

حدث $\text{س}^{\text{ن}} = \text{جت}\,\text{ن}\,\text{هـ} + \sqrt{-١}\ \text{جا}\,\text{ن}\,\text{هـ}$ فيوجد حينئذ للكمية س

مقادير جذور معادلة (٢) بتعيين هـ بهذا الشرط

$$\text{جت}\,\text{ن}\,\text{هـ} \pm \sqrt{-١}\ \text{جا}\,\text{ن}\,\text{هـ} = -١$$

فعلي هذا يوجد $\text{جا}\,\text{ن}\,\text{هـ} = ٠$ و $\text{جت}\,\text{ن}\,\text{هـ} = -١$ كل على حدته

ومن ذلك ينتج ان قوس ن هـ يلزم ان يكون مضروبا فردا للكمية ط

وبهذا السبب يفرض

$$\text{ن}\,\text{هـ} = (٢\text{ك} + ١)\text{ط}$$ ومنه يوخذ

$$\text{هـ} = \frac{(٢\text{ك}+١)\text{ط}}{\text{ن}}$$ فيحدث

$$\text{س} = \text{جت}\frac{(٢\text{ك}+١)\text{ط}}{\text{ن}} \pm \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{(٢\text{ك}+١)\text{ط}}{\text{ن}} \qquad (\text{ب})$$

ولا نأخذ المضاريب السالبة للكمية ط لانها تكون عين مقادير س فيما لو كانت هذه المضاريب موجبة ولا نأخذ ايضا $\text{ك} > \text{ن}$ بل ولا $\text{ك} = \text{ن}$ لانا لو طرحنا من ك مضروب ن المشتملة عليه لنقص قوس $\frac{(٢\text{ك}+١)\text{ط}}{\text{ن}}$ مرة كاملة من المحيطات او مرات وذلك لا يغير مقادير معادلة (ب) فمقدار $\text{ك} = \text{ن} - ١$ يفيد

$$\text{س} = \text{جت}\frac{(٢\text{ن}-١)\text{ط}}{\text{ن}} \pm \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{(٢\text{ن}-١)\text{ط}}{\text{ن}} =$$

$$\text{جت}\left(-\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right) \pm \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{\text{ط}}{\text{ن}} = \text{جت}\frac{\text{ط}}{\text{ن}} \mp \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$$

وهذه المقادير عين المقادير التي توجد بفرض $\text{ك} = ٠$ فعلى كل حال مقادير ك المتساوية الابعاد من ٠ و $\text{ن} - ١$ تفيد عين مقادير س لانه اذا وضع $\text{ك} = \text{ن} - ١ - \text{كَ}$ يحدث

$$\text{س} = \text{جت}\frac{(٢\text{ن}-٢\text{كَ}-١)\text{ط}}{\text{ن}} \pm \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{(٢\text{ن}-٢\text{كَ}-١)\text{ط}}{\text{ن}}$$

$$= \text{جت}\frac{(٢\text{كَ}+١)\text{ط}}{\text{ن}} \mp \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{(٢\text{ك}+١)\text{ط}}{\text{ن}}$$

وهذا الحاصل عين الحاصل فيما اذا فرض ان ك = كَ فمن ذلك ينتج ان جميع
مقادير س توجد باعطاء ك مقادير لا تزيد عن ½(ن ـ ١) فحينئذ
اذا كان ن عددا زوجا ٢ل يلزم ان يفرض ك = ٠ وك = ١
وك = ٢ ‥‥‥ ك = ل ـ ١ واذا كان ن عددا فردا ٢ل + ١
يلزم ان يفرض ك = ٠ وك = ٢ ‥‥ ك = ل
وفي صورة ما اذا كانت ن = ٢ل تكون المعادلة المطلوب حلها س^٢ل = ـ ١
واعداد ك = ٠ وك = ١ وك = ٢ ‥‥‥ ك = ل ـ ١
تفيد في معادلة (ب) الاقواس التصاعدية

$$\frac{ط}{٢ل} \text{ و } \frac{٣ط}{٢ل} \text{ و } \frac{٥ط}{٢ل} \cdots\cdots \frac{(٢ل-١)\ ط}{٢ل}$$

وهذه الاقواس جميعها منحصرة بين صفر وط وحينئذ لا يساوي جيب
واحد منها صفرا وجيوب تماماتها كلها غير متساوية فكل قوس يفيد
مجهول س مقدارين تخيليين كل منهما يختلف عن الآخر باشارة
$\sqrt{-1}$ ولا يمكن تكررهما فيكون لمقدار س مقادير مختلفة عددها
٢ل

وفي صورة ما اذا كان ن = ٢ل + ١ تكون المعادلة المطلوب حلها
س^٢ل+١ = ـ ١ والاعداد التي هي ك = ٠ وك = ١ وك = ٢
‥‥‥‥ ك = ل تغير في معادلة (ب) اقواس

$$\frac{ط}{٢ل+١} \quad \frac{٣ط}{٢ل+١} \cdots\cdots \frac{(٢ل+١)\ ط}{٢ل+١} \text{ او } ط$$

حيث كان القوس الاخير المساوي ط يفيد س = ـ ١ ويكون لمقدار
س في كل من الاقواس الباقية مقداران تخيليان ولا صعوبة في مشاهدة
انه لا شيء من هذه المقادير يتكرر فقد ثبت ان س لها مقادير عددها
٢ل + ١

اذا عرفت جذور معادلتى $\text{س}^{\text{ن}}=+1$ و $\text{س}^{\text{ن}}=-1$ سهل عليك تكوين القواسم الحقيقية التى بدرجة ثانية لكميتى $\text{س}^{\text{ن}}-1$ و $\text{س}^{\text{ن}}+1$ ذاتى الحدين

وبيان ذلك اولا ان قانون (ا) يفيد ذات الحدين $\text{س}^{\text{ن}}-1$ فى المضاريب التى بدرجة اولى مقدارين

$$\text{س}-\text{جت}\,\frac{2\text{ك}\text{ط}}{\text{ن}}+\sqrt{-1}\;\text{جا}\,\frac{2\text{ك}\text{ط}}{\text{ن}}$$

$$\text{س}-\text{جت}\,\frac{2\text{ك}\text{ط}}{\text{ن}}+\sqrt{-1}\;\text{جا}\,\frac{2\text{ك}\text{ط}}{\text{ن}}$$

وبضربهما فى بعضهما يحدث

$$\text{س}^{2}-2\,\text{س}\,\text{جت}\,\frac{2\text{ك}\text{ط}}{\text{ن}}+1 \qquad (\text{اَ})$$

وهذا القانون يشتمل على جميع القواسم الحقيقية بدرجة ثانية لذات الحدين $\text{س}^{\text{ن}}-1$ ولاجل استخراجها منه يكفى ان توضع الاعداد الصحيحة من ابتداء الصفر الى $\frac{1}{2}\text{ن}$ بدلا من ك

وبمثل ما تقدم يمكن ان يوجد للقواسم بدرجة ثانية لذات الحدين $\text{س}^{\text{ن}}+1$ هذا القانون

$$\text{س}^{2}-2\,\text{س}\,\text{جت}\,\frac{(2\text{ك}+1)\,\text{ط}}{\text{ن}}+1 \qquad (\text{بَ})$$

ويلزم فى هذا القانون ابدال ك بالاعداد الصحيحة الموجبة من ابتداء $\text{ك}=0$ الى عدد $\frac{1}{2}(\text{ن}-1)$

وحيث كان قانونا (ا) و (ب) مشتملين على الجذور الحقيقية لمعادلتى $\text{س}^{\text{ن}}=1$ $\text{س}^{\text{ن}}=-1$ ينتج ان القانونين الاخيرين يشتملان على المضاريب الحقيقية بدرجة اولى لذاتى الحدين

$\text{س}^{\text{ن}}-1$ $\text{س}^{\text{ن}}+1$.

لكن لابد من التنبيه على ان القواسم فى هذين القانونين مرفوعة لدرجة التربيع فاذا فرض مثلا ان ك = ٠ فى قانون (أ) يصير هذا القانون س٢ ـ ٢ س + ١ او (س ـ ١)٢ لكن لا يوخذ الا س ـ ١

دعوى المهندس قوطس النظرية

(١٣٥)

لاجل وضع هذه الدعوى يتنبه الى انه اذا اعطيت ك فى قانون (أ) جميع المقادير ك = ٠ و ك = ١ و ك = ٢ ٠٠٠٠٠ الى ك = ن ـ ١ وضربت ذات الثلاثة حدود الناتجة من هذه المقادير كل منها فى الآخر حدث كما هو واضح حاصل فيه جميع المضاريب سن ـ ١ مرتفعة الى درجة التربيع وحينئذ يكون هذا الحاصل مساويا (سن ـ ١)٢ وكذلك اذا اعطيت ك فى قانون (ب) جميع المقادير ك = ٠ و ك = ١ و ك = ٢ ٠٠٠٠٠٠ الى ك = ن ـ ١ فحاصل ضرب جميع الثلاثة حدود يساوى (سن + ١)٢

اذا تقرر هذا فاقسم محيطا ما الى اقسام متساوية عددها ٢ن واشر الى نقط التقسيم بنمرة ٠ و ١ و ٢ و ٣ الخ ثم ارسم من نقطة ٠ بجعلها اصلا نصف قطر يمتد خلف هذه النقطة اذا كان ذلك ضروريا ثم ضع نقطة على نصف القطر من جهة نقطة ٠ على بعد ما س من المركز ثم مد خطوطا مستقيمة الى جميع نقط التقسيم

وحينئذ يجعل نصف القطر هو الواحد ويرمز بحرف ص الى خط ما من هذه الخطوط المستقيمة وانظر المثلث الحادث منه مع الخطين اللذين يلتقيان بنهايتيه فى المركز فان التقى هذا الخط بنقطة تقسيم من عدد زوج ٢ك فالقوس المحصور بين هذا التقسيم والنقطة الاصلية ٠ يكون

$$\frac{٢ط}{٢ن} \times ٢ك \quad \text{او} \quad \frac{٢ كط}{ن}$$

فيشاهد بسهولة بواسطة المثلث انه يحدث

$$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}\,\text{جت}\,\frac{٢\text{ك}\,\text{ط}}{\text{ن}} + ١$$

واذا كان خط ص ملتقيا بنقطة من عدد زوج ٢ك+١ يحدث

$$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}\,\text{جت}\,\frac{(٢\text{ك}+\text{ط})}{\text{ن}} + ١$$

ويوضع اعداد ٠ و ١ و ٢ ...... الى ن−١ عوضا عن ك
فى ذاتى الثلاثة حدود على التعاقب يحدث من الاولى مربعات المستقيمات
الواصلة الى نقط التقسيم الزوجية ومن الثانية مربعات المستقيمات المنتهية
بنقط التقسيم الفردية وحيث ان ذاتى الثلاثة حدود المذكورتين
عين داتى الحدين (أ) و (ب) يمكن ان ينتج من ذلك على حسب ماذكرناه
آنفا الدعوى النظرية التى استكشفها المهندس قوطس وهى ان حاصل ضرب
جميع الخطوط الواصلة الى نقط التقسيم الزوجية من محيط الدائرة يساوى
فاضل $\text{س}^{\text{ن}} - ١$ وحاصل ضرب جميع الخطوط الواصلة الى نقط التقسيم
الفردية يساوى مجموع $\text{س}^{\text{ن}} + ١$

حل المعادلات التى بدرجة ثالثة

بواسطة الجداول

(١٣٦)

المعادلة التى بدرجة ثالثة تحول صورتها الى هذه

$$\text{س}^{٣} + ٣\text{ل}\,\text{س} + ٢\text{ك} = ٠$$

وقد ثبت فى الجبر ان مقادير س الثلاثة داخلة فى قانون

$$\text{س} = \sqrt[٣]{-\text{ك} + \sqrt{\text{ك}^{٢} + \text{ل}^{٣}}} + \sqrt[٣]{-\text{ك} - \sqrt{\text{ك}^{٢} + \text{ل}^{٣}}}$$

وحيث كانت المقادير المكررة لجذرى التكعيب تجعل ان هذه الكمية تسعة
مقادير يلزم ان يتذكر انه اذا رمز الى الجزء الاول من الجذرين المذكورين
بحرف ح والى الثانى بحرف ء لا يلزم جعل الاشتراك الابين ح و ء

حيث

حيث ان $ح ك = -ل$ فبهذه الكيفية يمكن ابعاد جميع المقادير الاجنبية بوضع

$$ح = \sqrt[3]{-ك + \sqrt{ك^2 + ل^3}} \quad و \quad س = ح - \frac{ل}{ح}$$

(١٣٧)

متى كان $ك^2 + ل^3$ كمية سالبة فالمقادير السالبة العمومية لكمية $س$ تكون صعبة الوضع بسبب المقادير التخيلية وحيث ثبت فى الجبر فى حال فرض $ك^2 + ل^3 < ٠$ ان جذور المعادلة الثلاثة حقيقية يظهر ان الحسابات لابد وان تؤدى الى طرق تختصر بها المقادير التخيلية ولكن فى الحقيقة لا يتأتى ذلك الا اذا استعملت المتسلسلات اللانهائية ولهذه الصعوبة التى مرنت الجبريين على العمل سميت الحالة التى نحن بصددها الحالة غير القابلة للاختصار وانما تنشأ الصعوبة من كون جذرى التكعيب الداخلين فى كمية $س$ العمومية لايمكن استخراجهما بحيث يكون الجذر الحقيقى منفردا عن الجذر التخيلى الا فى احوال مخصوصة وبمقتضى قانون مواور يحصل هذا الانفراد فى مقادير صورة $\sqrt[ن]{جت\ هـ + \sqrt{-1}\ جا\ هـ}$ ولاجل ذلك نشرع فى تحويل جذرى التكعيب الى الصورة المتقدمة فنقول

حيث كان $ك^2 + ل^3 < ٠$ تكون $ل$ سلبية وبوضع $-ل$ عوضا عن $ل$ تكتب المعادلة هكذا

$$س^3 - ٣ل\,س + ٢ك = ٠ \qquad (١)$$

وحينئذ تحدث $ك^2 - ل^3 < ٠$ او $ك^2 < ل^3$ فمقادير $ح$ تعلم من قانون

$$ح = \sqrt[3]{-ك + \sqrt{ك^2 - ل^3}}$$

ومقادير $س$ تعلم من قانون

$$س = ح + \frac{ل}{ح} = \sqrt{ل}\left(\frac{ح}{\sqrt{ل}} + \frac{\sqrt{ل}}{ح}\right)$$

الذى فيه يلزم وضع جميع مقادير ح المختلفة ومتى ثبت ذلك حدث من مقدار ح العمومى

$$\frac{ح}{\sqrt{ل}} = \sqrt[3]{-\frac{ك}{ل^{3}} + \sqrt{1-\frac{ك^{2}}{ل^{3}}}\sqrt{-1}}$$

وحيث فرض ان $ك^{2} < ل^{3}$ امكن تعيين قوس هـ بواسطة معادلة

$$\text{جتا}\,هـ = \frac{-ك}{\sqrt{ل^{3}}}$$

فتوجد اقواس لانهايية مقابلة لجيب التمام المعلوم ولكن نصطلح هنا على ان نأخذ تمام الجيب الذى يكون $< 180°$

فمن قانون مواور يحدث ضرورة

$$\left(\text{جتا}\,\tfrac{1}{3}هـ + \sqrt{-1}\,\text{جا}\,\tfrac{1}{3}هـ\right)^{3} = \text{جتا}\,هـ + \sqrt{-1}\,\text{جا}\,هـ \quad (2)$$

وبالعكس يحدث ايضا $\sqrt[3]{\text{جتا}\,هـ + \sqrt{-1}\,\text{جا}\,هـ} = \text{جتا}\,\tfrac{1}{3}هـ + \sqrt{-1}\,\text{جا}\,\tfrac{1}{3}هـ$ وحينئذ يحدث

$$\frac{ح}{\sqrt{ل}} = \sqrt[3]{\text{جتا}\,هـ + \sqrt{-1}\,\text{جا}\,هـ} = \text{جتا}\,\tfrac{1}{3}هـ + \sqrt{-1}\,\text{جا}\,\tfrac{1}{3}هـ$$

$$\text{و}\quad \frac{\sqrt{ل}}{ح} = \frac{1}{\text{جتا}\,\tfrac{1}{3}هـ + \sqrt{-1}\,\text{جا}\,\tfrac{1}{3}هـ} = \text{جتا}\,\tfrac{1}{3}هـ - \sqrt{-1}\,\text{جا}\,\tfrac{1}{3}هـ$$

$$\text{و}\quad \frac{ح}{\sqrt{ل}} + \frac{\sqrt{ل}}{ح} = 2\,\text{جتا}\,\tfrac{1}{3}هـ$$

وليلاحظ ان الطرف الثانى من معادلة (٢) لا يتغير حين يضاف الى هـ فى هذه المعادلة عدد ما من الدوائر وعلى ذلك ينبغى انه اذا رمز الى ١٨٠° بحرف ط وبحرف ك الى عدد ما صحيح يمكن ان يجعل الكمية س جميع المقادير المنحصرة فى قانون .

$$س = ٢\sqrt{ل}\ جت\tfrac{١}{٣}\ (هـ + ٢ك ط)$$

ولكن لا يلزم ان يظن انه يحدث للكمية س اكثر من ثلاثة مقادير لانه بعد فرض $ك = ٠$ و ١ و ٢ تحدث الفروض الاخرى عين الحواصل التي حدثت وعلى كل حال لا ينتج من المقادير الا

$$س = ٢\sqrt{ل}\ جت\tfrac{١}{٣}هـ \quad و$$

$$س = ٢\sqrt{ل}\ جت\tfrac{١}{٣}\ (هـ + ٢ط) \quad و$$

$$س = ٢\sqrt{ل}\ جت\tfrac{١}{٣}\ (هـ + ٤ط)$$

(١٣٨)

وانما استعنا بالخطوط المثلثية لتسهيل الصعوبة في الحالة غير القابلة للاختصار ويمكن الاستعانة بها ايضا في بقية الاحوال ولنستمر على جعل ل سالبة فنعتبر معادلة

$$س^{٣} - ٣ل س + ٢ك = ٠ \qquad (٣)$$

غير انا نفرض $ك^{٢} > ل^{٣}$ فتكون التحويلات التي في البند السابق مستحيلة لان جتهـ بقطع النظر عن علاماتها تكون > ١ وهاك كيفية بيان هذه الحالة

$$س = \sqrt{ل}\left(\frac{م}{\sqrt{ل}} + \frac{\sqrt{ل}}{م}\right)$$

فالآن نضع $\frac{م}{\sqrt{ل}}$ على هذه الصورة

$$\frac{م}{\sqrt{ل}} = \sqrt[٣]{-\frac{ك}{\sqrt{ل^{٣}}} + \sqrt{\frac{ك^{٢}}{ل^{٣}} - ١}}$$

ونعين قوس هـ من معادلة

$$جا٢هـ = -\frac{\sqrt{ل^{٣}}}{ك}$$

وحينئذ يحدث $\frac{م}{\sqrt{ل}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{جا٢هـ} + \sqrt{\frac{١}{جا^{٢}٢هـ} - ١}} = \sqrt[٣]{\frac{١ - جت٢هـ}{جا٢هـ}}$

وباخذ جذر التربيع يمكن ان يؤخذ ـــ جت ٢هـ او + جت ٢هـ بدون ترجيح وسنأتي على ذلك وبوضع مقدار ٢ جا^{٢}هـ و ٢ جاهـ جتهـ عوضا عن ١ ـــ جت ٢هـ و جت ٢هـ عوضا عن جا٢هـ ثم اختصار الحاصل يحدث

$$\frac{ح}{\sqrt{ل}} = \sqrt[٣]{\frac{٢ جا^{٢} هـ}{٢ جاهـ جتهـ}} = \sqrt[٣]{ظاهـ}$$

ثم بوضع ظاو $= \sqrt[٣]{ظاهـ}$ ويحسب قوس و بهذا القانون واذا رمزنا بحرفي ع و ع^{٢} الى جذرى تكعيب الواحد التخيليين اللذين احدهما تربيع للآخر كما هو معلوم تكون المقادير الثلاث لكمية $\frac{ح}{\sqrt{ل}}$ هكذا

$$\frac{ح}{\sqrt{ل}} = ظاو \quad \frac{ح}{\sqrt{ل}} = ع ظاو \quad و \quad \frac{ح}{\sqrt{ل}} = ع^{٢} ظاو$$

وبوضع هذه المقادير في مقدار س والتنبيه على ان ظا و ظت و = ١ وعلى ان ع^{٣} = ١ يحدث

$$س = \sqrt{ل} \ (ظاو + ظت و)$$

$$س = \sqrt{ل} \ (ع^{٢} ظاو + ع ظت و)$$

$$س = \sqrt{ل} \ (ع^{٢} ظاو + ع ظت و)$$

فلو وضع في الحساب + جت ٢هـ عوضا عن ـــ جت ٢هـ لتغير ظاو الى ظت و وبالعكس لكن ذلك لا ينتج مقدارا جديدا الكمية س ولنستعوض الآن ع و ع^{٢} بمقاديرهما ونفرق في كل مقدار من مقادير س الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي فيحدث بواسطة الجبران

$$ع = \frac{١}{٢} (-١ + \sqrt{-٣}) \quad و \quad ع^{٢} = \frac{١}{٢} (-١ - \sqrt{-٣})$$

فاذا انبه زيادة على ذلك على ان ظت و + ظاو = ٢ قت ٢ و وعلى ان ظت و ـــ ظاو = ٢ ظت ٢ و حدث بعد الاختصار الكلي

$$\text{س} = ٢\sqrt{\text{ل}}\ \text{قت}\ ٢\text{و}$$

$$\text{س} = -\sqrt{\text{ل}}\ (\text{قت}\ ٢\text{و} + \sqrt{-٣}\ \text{ظت}\ ٢\text{و})$$

و

$$\text{س} = -\sqrt{\text{ل}}\ (\text{قت}\ ٢\text{و} - \sqrt{-٣}\ \text{ظت}\ ٢\text{و})$$

١٣٩

ولابد من اعتبار الحالة التي فيها ل موجبة واخذ المعادلة التي بدرجة ثالثة كما كانت اولا هكذا

$$\text{س}^{٣} + ٣\text{ل}\,\text{س} + ٢\text{ك} = ٠ \qquad (٤)$$

فبسبب ان حى = ـــل يحدث

$$\text{س} = \text{ح} - \frac{\text{ل}}{\text{ح}} = \sqrt{\text{ل}}\left(\frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{ل}}} - \frac{\sqrt{\text{ل}}}{\text{ح}}\right)$$

ومن المعلوم ان

$$\frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{ل}}} = \sqrt[٣]{-\frac{\text{ك}}{\sqrt{\text{ل}^{٣}}} + \sqrt{\frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٣}} + ١}}$$

فيمكن ان يكون الظل وظل التمام مارين بجميع درجات الكم وحيث كان يمكن ان الحد $\frac{-\text{ك}}{\sqrt{\text{ل}^{٣}}}$ كم ما نستعوضه بوضع احد الظلين فنفرض مثلا ان

$$\text{ظت}\ ٢\text{هـ} = \frac{-\text{ك}}{\sqrt{\text{ل}^{٣}}} \qquad \text{فيحدث}$$

$$\frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{ل}}} = \sqrt[٣]{\text{ظت}\ ٢\text{هـ} + \sqrt{\text{ظت}^{٢}\ ٢\text{هـ} + ١}} = \sqrt[٣]{\frac{١ + \text{جت}\ ٢\text{هـ}}{\text{جا}\ ٢\text{هـ}}}$$

$$\sqrt[٣]{\frac{٢\,\text{جت}^{٢}\,\text{هـ}}{٢\,\text{جا}\,\text{هـ}\,\text{جت}\,\text{هـ}}} = \sqrt[٣]{\text{ظت}\,\text{هـ}}$$

ولنفرض ايضا ان $\text{ظت}\,\text{و} = \sqrt[٣]{\text{ظت}\,\text{هـ}}$

فزاويتا و و هـ تسهل معرفتهما بواسطة الجداول فتحدث هذه المقادير الثلاث

$\frac{ح}{\sqrt{ل}}$ = ظت و ، $\frac{ح}{\sqrt{ل}}$ = ع ظت و ، $\frac{ح}{\sqrt{ل}}$ = ع٢ ظت و

وبالبناء عليه تكون مقادير س الثلاثة بعد عمل الاختصار

س = ٢ $\sqrt{ل}$ ظت ٢ و

س = − $\sqrt{ل}$ (ظت ٢ و − $\sqrt{-٣}$ قت ٢ و)

س = − $\sqrt{ل}$ (ظت ٢ و + $\sqrt{-٣}$ قت ٢ و)

طريقة اخرى لحل المعادلات التى بدرجة ثالثة بواسطة حساب المثلثات

(١٤٠)

متى عرف خط مثلثى مقابل لقوس ما واريد البحث عن خط مقابل لقوس يساوى نصف القوس الاول او ثلثه او نحو ذلك يتوصل الى معادلات بمقابلتها مع معادلات اخرى معلومة يمكن ايجاد جذور هذه المعادلات المعلومة بطريقة سهلة وهذا ما نشتغل بذكره الآن لاجل معادلة بدرجة ثالثة فنشتغل بالمعادلة التى ليس لها طرف ثانى وهى

$$س^٣ + ٣ ل س + ٢ ك = ٠ \qquad (١)$$

فاذا رمزنا بحرف هـ الى قوس ما واعتبر جت هـ معلوما وفرض ان جت $\frac{١}{٣}$ هـ = ص يقال قد وجد كما فى نمرة (٣٣) لاجل تعيين ص هذه المعادلة

$$ص^٣ - \frac{٣}{٤} ص - \frac{١}{٤} جت هـ = ٠ \qquad (٢)$$

فاذا فرض ان هـ القوس الموجب الاقل من ط المقابل لجيب التمام المعلوم فمن المبرهن عليه ان الجذور الثلاثة التى لمعادلة (٢) هى

ص = جت $\frac{١}{٣}$ هـ و ص = جت $\frac{١}{٣}$ (٢ ط + هـ) و ص = جت $\frac{١}{٣}$ (٢ ط − هـ)

ولاجل تصيير معادلة (٢) عين معادلة (١) يلزم شرطان ان يكون فى معادلة (٢) كميتان غير معينتين والا يوجد فيها الا هـ واحدة فيلزم ان يدخل فيها كمية ثانية ككمية عَ مثلا بفرض ان س = ع ص

ومنها

ومنها يؤخذ $ص = \frac{س}{ع}$ وبهذا التحويل تصير معادلة (٢) هكذا

$$س^٣ - \frac{٣}{٤} ع^٢ س - \frac{١}{٤} ع^٣ جت هـ = ٠ \qquad (٤)$$

فاذا ضربت مقادير (٣) فى ع توجد جذور المعادلة الاخيرة وتصير جذور هذه المعادلة عين معادلة (١) بوضع

$$- \frac{٣}{٤} ع^٢ = ٣ ل - \frac{١}{٤} ع^٣ جت هـ = ٢ ك$$ ومنه يؤخذ

$$ع = ٢ \sqrt{-ل} \quad و \quad جت هـ = \frac{ك}{ل \sqrt{-ل}}$$

ولاجل ان يكون قوس هـ حقيقيا يلزم اولا ان يكون جت هـ حقيقيا وذلك يقتضى ان تكون ل سالبة فى معادلة (١) فحينئذ يوضع $-ل$ بدل ل فيحدث

$$س^٣ - ٣ ل س + ٢ ك = ٠ \qquad (٥)$$

ومقدارا ع وجت هـ يكونان

$$ع = ٢ \sqrt{ل} \quad و \quad جت هـ = \frac{-ك}{\sqrt{ل^٣}}$$

ولاجل ان تكون هـ حقيقية يلزم ان يكون جت هـ بقطع النظر عن العلامة < ١ اعنى ان يكون $ك^٢ < ل^٣$ او يكون $ك^٢ - ل^٣ < ٠$

وحينئذ يمكن حساب هـ بواسطة الجداول وبضرب مقادير (٣) فى ع اوفى $٢ \sqrt{ل}$ توجد جذور معادلة (٥) وهى

$س = ٢ \sqrt{ل} \; جت \frac{١}{٣} هـ$ و

$س = ٢ \sqrt{ل} \; جت \frac{١}{٣} (٢ ط + هـ)$ و

$س = ٢ \sqrt{ل} \; جت \frac{١}{٣} (٢ ط - هـ)$

وهذه المقادير يسهل حسابها بالجداول ويمكن تحويل المقادير التى سبقت فى بند (٣٧) الى هذه بسهولة

وقد فرضنا تلويحا ان مقدار ع موجب اى $ع = ٢ \sqrt{ل}$ ويمكن فرضه

سالبا اى $ع=-٢\sqrt{ل}$ فيلزم ان يوضع $جته=\frac{-ك}{\sqrt{ل^٣}}$ بدل

$جته=\frac{-ك}{\sqrt{ل^٣}}$ فيلزم فى المقادير السابقة ان يوضع $-\sqrt{ل}$ بدل

$\sqrt{ل}$ كما يوضع ايضا ط-ه بدل ه وحيث كانت المعادلة التى بدرجة ثالثة ليس لها الا ثلاثة جذور لا يوجد مقدار جديد لكمية س وهذا سهل التحقيق

ومتى فرضت ل سالبة و $ك^٢ < ل^٣$ آلت معادلة (١) الى صورة عدم قبول الاختصار وحينئذ تحل هذه الحالة بالطريقة التى سبقت

(١٤١)

ولنستمر دائما على فرض ل سالبة لكن نفرض ان $ك^٢-ل^٣ > ٠$ وان علامة $>$ لا يزول بها التساوى ففى هذا الغرض لا تكون مقادير س الموجودة سابقا تخيلية الا بسبب ان الشرط الذى يعين ه يقتضى ان يكون جته $>$ ١ فيلزم البحث عن كون مقدار $س > ٢\sqrt{ل}$

ولاجل ذلك نضع $س=٢\sqrt{ل}قتو$ او $س=٢\sqrt{ل}$ قت ٢و وهذا احسن لاجتناب الكسور فحينئذ يلزم تركيب معادلة بدرجة ثالثة تحتوى على جذر حقيقى بهذه الكيفية ويكون جذراها الاخران تخياليين ويسهل حلها بواسطة الجداول وبدون ان يفرض شئ فى مضروب قت ٢و يوضع $س=٢ع$ قت ٢و ولنفرض ان ع و و كميتان غير منتهيتين فان لاحظنا ان

$$٢قت٢و=\frac{٢}{جا٢و}=\frac{جا^٢و+جت^٢و}{جاوجتو}=ظاو+ظتو$$ يحدث

$س=ع\ (ظاو+ظتو)$

فيكون $س^٣=ع^٣(ظا^٣و+ظت^٣و)+٣ع^٣(ظاو+ظتو)$ او

$$س^٣-٣ع^٢س-ع^٣\ (ظا^٣و+ظت^٣و)=٠ \quad (٦)$$

بوضع س بدل ع (ظاو + ظتو) وبالتحويل

فاذا فرضنا ان جذرى التكعيب التخيليين ع َ و ع َ٢ يسهل التوصل الى معادلة (٦) باخذ احد هذه المقادير الثلاثة

س = ع (ظاو + ظتو)

س = ع (ع َظاو + ع َ٢ ظتو)

س = ع (ع َ٢ ظاو + ع َظتو)

وحينئذ تكون هذه المقادير هى جذور معادلة (٦) والآن يلزم تصيير هذه المعادلة عين المعادلة السابقة التى هى

$$س^{٣} - ٣ل س + ٢ك = ٠$$

ويؤخذ من هذا

$$ع = \sqrt{ل} \quad و \quad ظا^{٣}و + ظت^{٣}و = \frac{-٢ك}{\sqrt{ل^{٣}}}$$

ولاجل ايجاد و يجب وضع ظاو $= \sqrt[٣]{ظاهـ}$ فيحدث

ظاهـ = ظا^{٣}و ظتهـ = ظت^{٣}و ومن ذلك ينتج

$$ظاهـ + ظتهـ = -\frac{٢ك}{\sqrt{ل^{٣}}} \quad و \quad \frac{جاهـ}{جتهـ} + \frac{جتهـ}{جاهـ} = \frac{-٢ك}{\sqrt{ل^{٣}}}$$

$$و \quad \frac{جا^{٢}هـ + جت^{٢}هـ}{جاهـ جتهـ} = \frac{-٢ك}{\sqrt{ل^{٣}}} \quad و \quad جا٢هـ = \frac{-\sqrt{ل^{٣}}}{ك}$$

وبهذه الطريقة يفهم هـ من الجداول ومن هـ يحدث و ثم تحدث مقادير س وبوضع مقدار ع و ع َ و ع َ٢ عوضا عنها وعمل الاختصار يوجد كما فى بند (١٣٨)

$$س = \sqrt{ل} \ قت٢و \quad و$$

$$س = -\sqrt{ل} \ (قت٢و + \sqrt{-٣} ظت٢و) \quad و$$

$$س = -\sqrt{ل} \ (قت٢و - \sqrt{-٣} ظت٢و).$$

(١٤٢)

وهذه القوانين لا تليق الا باحوال معادلة

$س^{٣} + ٣ ل س + ٢ ك = ٠$ التي فيها ل سالبة و $ك^{٢} > ل^{٣}$ والالزم ان يكون مقدار جا ٢ هـ اما تخيليا واما > ١ فيلزم تغيير الطريقة اذا كانت ل موجبة فنفرض حينئذ ان $س = ٢ ع \text{ جت} ٢ و$ فيحدث ايضا

$$س = ٢ ع \left(\frac{\text{جت}^{٢} و - \text{جا}^{٢} و}{٢ \text{ جا} و \text{ جت} و} \right) = ع (\text{ظت} و - \text{ظا} و)$$

وبالرفع الى التكعيب يتوصل كما سبق الى معادلة

$س^{٣} + ٣ ع^{٢} (\text{ظت} و - \text{ظا} و) = ٠$ (٧) التي جذورها الثلاثة هي

$س = ع (\text{ظت} و - \text{ظا} و)$ و

$س = ع (عَ \text{ ظت} و - عَ^{٢} \text{ظا} و)$ و

$س = ع (عَ^{٢} \text{ظت} و - عَ \text{ ظا} و)$

وتصير هذه المعادلة عين مقادير المعادلة المفروضة بفرض $ع = \sqrt{ل}$

و $\text{ظت}^{٣} و - \text{ظا}^{٣} و = \frac{-٢ ك}{\sqrt{ل^{٣}}}$ ولاجل تعيين كمية و بواسطة الجداول

يوضع $\text{ظت} و = \sqrt[٣]{\text{ظت} هـ}$ فيكون

$\text{ظت} هـ - \text{ظا} هـ = (\text{ظت}^{٣} و - \text{ظا}^{٣} و)$ وحينئذ يحدث

$$\text{ظت} هـ - \text{ظا} هـ = \frac{-٢ ك}{\sqrt{ل^{٣}}} \quad \text{او} \quad \text{ظت} ٢ هـ = \frac{-ك}{\sqrt{ل^{٣}}}$$

وحيث ان قوس هـ معلوم يمكن ايجاد مقادير س الثلاثة التي هي

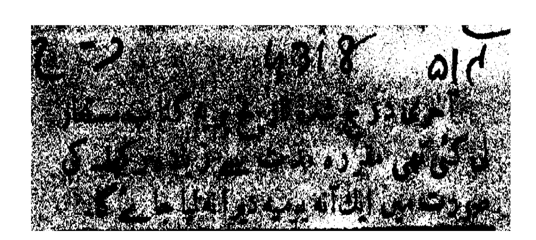
$س = ٢ \sqrt{ل} \text{ ظت} ٢ و$ و

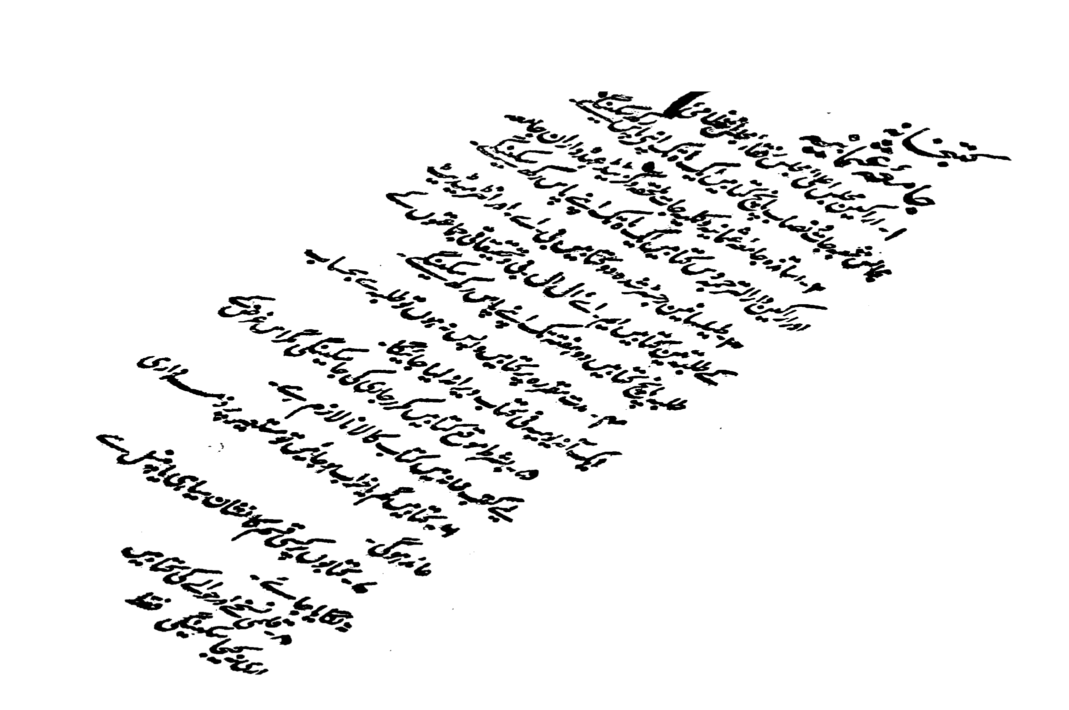
$س = -\sqrt{ل} (\text{ظت} ٢ و - \sqrt{-٣} \text{ قت} ٢ و)$ و

$س = -\sqrt{ل} (\text{ظت} ٢ و + \sqrt{-٣} \text{ قت} ٢ و)$

ولا يصح ان تعمل التحويلات التي سبقت في صورة ما اذا كان ل سلبيا لان ظت ٢ هـ حينئذ يكون تخيليا

وقد تم طبعه * واينع طلعه * بمطبعة صاحب الهمة العليه * والسعادة الابديه
التى انشأها ببولاق مصر المحميه * صانها الله من الآفات
والبليه * وذلك لعشر خلت من شعبان المكرم
سنة ١٢٥٩ هجريه * على صاحبها افضل
الصلاة وازكى التحيه





کتب خانہ
جامعہ عثمانیہ

۱۔ اراکین مجلس اعلیٰ، مجلس رفقا، مجلس انتظامی ایک وقت میں [illegible] اپنے پاس رکھ سکیں گے۔

[illegible]

۲۔ [illegible]

۳۔ [illegible]

۴۔ [illegible]

۵۔ [illegible]

۶۔ [illegible]

ادا کرنا ہوگا۔

۷۔ [illegible]

۸۔ [illegible]

